SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 07

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{ll} x+ky+kz & =1 \\ x+2ky+(k+1)\,z & =1 \\ 2x+ky+kz & =2 \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{ll} x+ky+kz & =1 \\ x+2ky+(k+1)\,z & =1 \\ 2x+ky+kz & =2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & 1 \\ 1 & 2k & k+1 & 1 \\ 2 & k & k & 2 \end{array}\right)=A^{*}$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real k:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 2k & k+1 \\ 2 & k & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=k-k^{2}$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro k, anulan este determinante. Es decir:

$$|A|=k-k^{2}=k\cdot(1-k)=0 \Rightarrow \quad k=0 \ \text{ó} \ k=1$$

Esto nos permite **distinguir tres casos posibles**:

CASO I: $k\neq 0 \ \ y \ \ k\neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & k & k & 1 \\ 1 & 2k & k+1 & 1 \\ 2 & k & k & 2 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como <u>**SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**</u>. $$R(A)=R(A^{*})=3=NUM.INCÓGNITAS$$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & k & k\\ 1 & 2k & k+1\\ 2 & k & k\end{vmatrix}}{k\cdot(1-k)}=\dfrac{k\cdot(1-k)}{k\cdot(1-k)}=1 \\[4ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & 1 & k+1\\ 2 & 2 & k\end{vmatrix}}{k\cdot(1-k)}=\dfrac{0}{k\cdot(1-k)}=0 \\[4ex] z=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ 1 & 2k & 1\\ 2 & k & 2\end{vmatrix}}{k\cdot(1-k)}=\dfrac{0}{k\cdot(1-k)}=0 \end{array}\right\} \rightarrow (x,y,z)=\ (1,0,0\,)$$

<table>
<tr><th colspan="2">CASO II: $k=1$</th></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$</td><td>En este caso, el sistema es <u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden, pero este valor es menor que el número de incógnitas. Se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[F3'=F3-2F1]{F2'=F2-F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F3'=F3+F2]{}$$ $$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$
Así pues, aquí se cumple que:
$$R(A)=R(A^*)=2\neq Num.\,incógnitas$$</td></tr>
</table>

Resolvamos el sistema aprovechando la aplicación del método de Gauss realizado en la discusión. En este caso, observamos que disponemos de un grado de libertad, por tanto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\mu \\ z=\mu \end{cases} \quad con\ \mu \in R$$

CASO III: $k=0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$	En este caso, el sistema es **<u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>**, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden, pero este valor es menor que el número de incógnitas. Se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss: $\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) \xRightarrow[F3'=F3-2F1]{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ Por tanto, se observa que: $R(A)=R(A^*)=2 \neq Num.incógnitas$

Resolvamos el sistema aprovechando la aplicación del método de Gauss realizado en la discusión. En este caso, observamos que disponemos de un grado de libertad, por tanto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases} \quad con\ \mu \in R$$

PROBLEMA 2: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z \quad = m \\ x+my+m^2z = m \\ x+m^2y+mz = m \\ x+y+mz \quad = 0 \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z \quad = m \\ x+my+m^2z = m \\ x+m^2y+mz = m \\ x+y+mz \quad = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m & m^2 & m \\ 1 & m^2 & m & m \\ 1 & 1 & m & 0 \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos, en esta ocasión, analizando el rango de la matriz ampliada, A^*. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real m:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m & m^2 & m \\ 1 & m^2 & m & m \\ 1 & 1 & m & 0 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m^2 & 1 \\ 1 & m^2 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 & 1 \\ 0 & m^2 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & m & 1 \end{vmatrix} = -m \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m-1 & m^2-1 & 1 \\ m^2-1 & m-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -m \cdot (m-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m \cdot (m-1)^2 \cdot (m^2+2m)$$

$$= m^2 \cdot (m-1)^2 \cdot (m+2)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro k, anulan este determinante. Es decir:

$$|A^*| = m^2 \cdot (m-1)^2 \cdot (m+2) = 0 \Rightarrow \quad m = 0 \text{ ó } m = 1 \text{ ó } m = -2$$

Esto nos permite **distinguir cuatro casos posibles**:

CASO I: $m \neq 0, 1, -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m & m^2 & m \\ 1 & m^2 & m & m \\ 1 & 1 & m & 0 \end{array}\right)$$

En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes no coinciden, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **SISTEMA INCOMPATIBLE**.

$$R(A) = 3 \neq 4 = R(A^*)$$

CASO II: $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes no coinciden, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **SISTEMA INCOMPATIBLE**.

$$Rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = Rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = Rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$R(A) = 1 \neq 2 = R(A^*)$$

CASO III: $m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso, el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**, ya los rangos de la matriz ampliada, de coeficientes y el número de incógnitas coinciden. Se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[F4'=F4-F1]{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{F3'=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, se observa que:

$$R(A) = R(A^*) = 3 = Num.\,incógnitas$$

Dado que el sistema es homogéneo y compatible determinado, ya sabemos que la solución del sistema será: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

<table>
<tr><th colspan="2">CASO IV: $m = -2$</th></tr>
<tr>
<td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$</td>
<td>En este caso, el sistema es <u>COMPATIBLE DETERMINADO</u>, ya los rangos de la matriz ampliada, de coeficientes y el número de incógnitas coinciden. Se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[F4'=F4-F1]{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$
$$\xRightarrow{F3'=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \xRightarrow{F3 \leftrightarrow F4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Por tanto, se observa que:
$$R(A) = R(A^*) = 3 = Num. incógnitas$$</td>
</tr>
</table>

Podríamos resolverlo utilizando la regla de Cramer, pero dado que para su discusión ya hemos utilizado el método de Gauss, aprovecharemos el trabajo realizado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ -3y + 3z = 0 \\ -3z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ y - z = 0 \\ z = -2/3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = -2/3 \\ y = -2/3 \\ z = -2/3 \end{array}\right\}$$

PROBLEMA 3: Considera la matriz:

$$R(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

En álgebra lineal se dice que una matriz cuadrada A de orden n es **una matriz de giro** o rotación si es **ortogonal** y $\mathbf{det}(A)=\mathbf{1}$. Atendiendo a esta definición se pide:

a) **Demuestra** que la matriz $R(\alpha)$ es una matriz de rotación en el espacio tridimensional (donde α representa el ángulo de giro)

b) **Calcula** $\left[R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2020}$

c) **Calcula** $\left[R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1}$

a) Simplemente hemos de comprobar que la matriz $R(\alpha)$ propuesta cumple las dos condiciones necesarias características de una matriz de rotación:

- Veamos primero que la matriz $R(\alpha)$ es ortogonal. Recordemos que una matriz es ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta. Para ello, tenemos la opción de calcular la matriz inversa $R^{-1}(\alpha)$ mediante el uso de adjuntos y comprobar que ésta coincide con $R^T(\alpha)$, o bien, (que es lo que haremos) comprobar que al multiplicar la matriz $R(\alpha)$ por su traspuesta se obtiene la matriz identidad.

$$R(\alpha)\cdot R^T(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} cos^2\,\alpha+sen^2\alpha & 0 & \cos\alpha\cdot sen\,\alpha-\cos\alpha\cdot sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\alpha\cdot sen\,\alpha+\cos\alpha\cdot sen\,\alpha & 0 & cos^2\,\alpha+sen^2\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar también fácilmente que ambas matrices conmutan:

$$R(\alpha)\cdot R^T(\alpha)=R^T(\alpha)\cdot R(\alpha)=I$$

Así pues, concluimos de estas relaciones que la inversa de $R(\alpha)$ es $R^T(\alpha)$, es decir: $R^{-1}(\alpha) = R^T(\alpha)$

- Finalmente comprobamos que el determinante de la matriz propuesta es uno.

$$|R(\alpha)| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = cos^2\,\alpha + sen^2\alpha = 1$$

Como conclusión podemos afirmar que **la matriz $R(\alpha)$ propuesta es una matriz de rotación**.

b) Ahora, sabemos que el ángulo de giro es de $\frac{\pi}{2}$ rad. Por tanto, la matriz a utilizar es:

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} cos\,\frac{\pi}{2} & 0 & sen\,\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\frac{\pi}{2} & 0 & cos\,\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comenzaremos calculando algunas potencias para ver cuál es el resultado o la pauta que debemos sintetizar de forma analítica:

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^4\left(\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot R^3\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

Observamos que sólo existen cuatro posibles matrices resultado al calcular una potencia de la matriz $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Además, estos resultados se van repitiendo de forma cíclica con periodicidad 4. Esto puede expresarse matemáticamente como:

$$R^n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} & si\ n=4k-3\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} & si\ n=4k-2\\ \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & si\ n=4k-1\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & si\ n=4k\end{cases}$$

siendo k un número natural.

Así pues, dado que 2020 es múltiplo de 4:

$$2020=4\cdot 505$$

Concluimos que:

$$R^{2020}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) Calcular la inversa de la matriz es muy simple. Dado que se trata de una matriz de rotación. Su inversa coincide con su traspuesta. Luego, no debemos perder tiempo calculando la inversa mediante ningún proceso.