DOSSIER SEMANAL 12

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = z \qquad s: \begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = 3 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in R$$

a) Determina razonadamente su **posición relativa**

b) Calcula el **ángulo** y la **distancia** entre ambas

c) Halla la **perpendicular común** a ambas rectas.

d) La ecuación de la recta que **se apoya** en r y s y que pasa por $O(0,0,0)$

a) Para determinar la posición relativa de dos rectas, extraemos primeramente un punto y un vector director de cada una de ellas. Observamos, primeramente, que la recta r no está bien escrita como ecuación continua, así pues, la escribimos adecuadamente:

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{1} = z$$

Ahora es fácil ver que:

$$\vec{u}_r = (2,1,1) \qquad P_r = (4,4,0)$$
$$\vec{u}_s = (3,0,1) \qquad P_s = (-2,3,1)$$

Así pues, dado que los vectores directores no son proporcionales, podemos asegurar que ambas rectas no serán ni paralelas ni coincidentes. Para averiguar si se cruzan o son secantes, lo que haremos será comprobar si el vector que une los puntos de ambas rectas es coplanario con los directores:

$$\overrightarrow{P_sP_r} = (4,4,0) - (-2,3,1) = (6,1,-1)$$

Para ver si son coplanarios hemos de ver si el determinante es nulo o no:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Dado que el determinante es distinto de cero, podemos afirmar que las rectas r y s se cruzan en el espacio.

Pedro A. Martínez Ortiz
www.maths4everything.com
@maths4everthink

b) Para obtener el ángulo de ambas rectas, calcularemos el ángulo formado por sus vectores directores:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{\|\vec{u}_r\| \cdot \|\vec{u}_s\|} = \frac{|6+0+1|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{9+0+1}} = \frac{7}{\sqrt{60}}$$

Así pues:

$$\alpha = arc\cos\frac{7}{\sqrt{60}} = 25{,}35º$$

Así mismo, la distancia entre dos rectas que se cruzan, podría obtenerse mediante el cálculo de la perpendicular común o bien, utilizando la expresión deducida en clase:

$$d(r,s) = \frac{\left|\det(\vec{u}_r,\ \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r})\right|}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|}$$

Dado que el determinante lo hemos calculado en el apartado a), simplemente hemos de averiguar el módulo del producto vectorial de los directores de ambas rectas:

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,-3)$$

Así pues:

$$d(r,s) = \frac{\left|\det(\vec{u}_r,\ \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r})\right|}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|} = \frac{10}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{10}{\sqrt{11}} = \frac{10\sqrt{11}}{11}\ u$$

c) Utilizaremos un método constructivo para obtener la perpendicular común a ambas rectas. Calcularemos la perpendicular común como intersección de dos planos secantes. Un primer plano que contiene a la recta r y está también dirigido por la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x+7y+z-12=0$$

Otro plano, que contiene a la recta s y está también dirigido por la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x+10y+3z-35=0$$

Así pues, la perpendicular común será:

$$t \equiv \begin{cases} -4x + 7y + z - 12 = 0 \\ -x + 10y + 3z - 35 = 0 \end{cases}$$

d) Obtendremos la recta que nos piden mediante el cálculo de dos planos. Una vez obtenidas las ecuaciones de ambos planos, expresaremos la recta como la intersección de estos.

Un primer plano es aquel que contiene a la recta r y pasa por el punto $O(0,0,0)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x + 4y + 4z = 0 \quad \Rightarrow -x + y + z = 0$$

El otro plano que necesitamos es aquel que contiene a la recta s y pasa por el punto $O(0,0,0)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x - 5y + 9z = 0$$

Así pues, la recta que se apoya en ambas rectas y pasa por el origen de coordenadas será:

$$l \equiv \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -3x - 5y + 9z = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 2: Determina la ecuación general del plano α que es perpendicular a la recta $r:(x,y,z)=\lambda\cdot(2,2,3)$ y pasa por el punto $P(1,-1,2)$. Este plano, corta a los ejes de coordenadas OX, OY y OZ en tres puntos A, B y C respectivamente. Estos vértices, junto con O (el origen de coordenadas), conforman un tetraedro. Se pide determinar:

a) Las **coordenadas** de los puntos A, B y C.

b) La **ecuación continua** de la recta que se corresponde con la altura del tetraedro que parte del vértice O.

c) La **distancia** del origen al plano que contiene a la cara ABC del tetraedro

d) El **área** de la cara ABC del tetraedro OABC

e) El **volumen** del tetraedro OABC

a) Para determinar las coordenadas de los puntos A, B y C, necesitamos previamente obtener la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de este plano será el director de la recta r, por tanto:

$$\alpha \equiv 2x+2y+3z+D=0$$

Para obtener el término independiente, sustituimos el punto P que debe pertenecer a dicho plano:

$$2\cdot 1-2\cdot 1+3\cdot 2+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-6$$

Así pues:

$$\alpha \equiv 2x+2y+3z-6=0$$

Ahora ya podemos calcular los vértices del tetraedro:

<u>Vértice A</u> (corte con el eje OX)

$$\left.\begin{array}{r} y=0 \\ z=0 \\ 2x+2y+3z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x=3 \ \Rightarrow \ A\,(3,0,0)$$

<u>Vértice B</u> (corte con el eje OY)

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ z=0 \\ 2x+2y+3z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ y=3 \ \Rightarrow \ B\,(0,3,0)$$

Vértice C (corte con el eje OZ)

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ 2x+2y+3z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; z=2 \;\Rightarrow\; C\,(0,0,2)$$

b) Necesitamos simplemente el vector director de la recta (que coincide con el vector normal del plano obtenido en el apartado a) y con el origen de coordenadas ya podemos escribir su ecuación continua:

$$h \equiv \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

c) La distancia coincide con la altura del tetraedro. Tenemos varias opciones. Una primera es utilizar la fórmula de la distancia de un punto a un plano deducida en clase. Otra opción, que es la que realizaremos, consiste en hallar el punto de corte entre la altura h y el plano α que contiene a los puntos A, B y C y tras ello hacer el módulo del vector que une dicho punto de corte con el origen de coordenadas.

Punto de corte entre el plano α y la altura h:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x+2y+3z-6=0 \\ h \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=2\mu \\ z=3\mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2\cdot 2\mu+2\cdot 2\mu+3\cdot 3\mu-6=0$$

$$4\mu+4\mu+9\mu-6=0 \;\Rightarrow\; \mu=\frac{6}{17}$$

El punto de corte M entre el plano y la altura es:

$$M\left(\frac{12}{17},\frac{12}{17},\frac{18}{17}\right)$$

Por tanto, la distancia que piden será:

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \left\|\left(\frac{12}{17},\frac{12}{17},\frac{18}{17}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{12}{17}\right)^2+\left(\frac{12}{17}\right)^2+\left(\frac{18}{17}\right)^2} = \frac{\sqrt{612}}{17} = \frac{6\sqrt{17}}{17}\;u$$

d) El área de la cara ABC puede obtenerse como la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC:

$$A = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|(6,6,9)\|}{2} = \frac{\sqrt{36+36+81}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{2}\ u^2$$

e) El volumen del tetraedro será la sexta parte del volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores que lo definen:

$$V = \frac{\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right|}{6} = \frac{18}{6} = 3\ u^3$$

PROBLEMA 3: Dados los puntos $A(1,0,0)$ y $B(0,0,1)$, determina el punto C que se encuentra en la recta r para que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Dado que deseamos que el triángulo ABC sea rectángulo en C, deberá ocurrir que el vector $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares. Esto se traduce en que su producto escalar ha de ser nulo. Dado que C está en la recta r, sus coordenadas genéricas vendrán dadas por las ecuaciones paramétricas de la recta. Así pues:

$$C(1, 1+\lambda, 1+\lambda)$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1, 1+\lambda, 1+\lambda) - (1,0,0) = (0, 1+\lambda, 1+\lambda)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1, 1+\lambda, 1+\lambda) - (0,0,1) = (1, 1+\lambda, \lambda)$$

Realizando su producto escalar:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = (0, 1+\lambda, 1+\lambda) \cdot (1, 1+\lambda, \lambda) = (1+\lambda)^2 + \lambda \cdot (1+\lambda)$$

Igualando a cero el resultado obtenemos:

$$(1+\lambda)^2+\lambda\cdot(1+\lambda)=0 \quad \rightarrow \quad (1+\lambda)\cdot(1+2\lambda)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=-1 \quad \text{ó} \quad \lambda=-\frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos dos posibles soluciones, el punto C puede ser:

$$C(1,1+\lambda,1+\lambda) \xrightarrow{\lambda=-1} C(1,0,0)$$

$$C(1,1+\lambda,1+\lambda) \xrightarrow{\lambda=-\frac{1}{2}} C\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$