Página 173

Cálculo de distancias

1 13 u

2 9 u

3 $r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$; 78 u

Página 174

1 $r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$

2 $5x - 6y + z - 28 = 0$

3 $5x - y - 5 = 0$

4 $5x + 2y - 6z - 23 = 0$

Página 175

5 $2x + 2y - z = 0$

6 $\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

Página 177

1 $\alpha = 85° \, 59' \, 7''$

2 $\alpha = 2° \, 14' \, 59''$

Página 179

1 7,07 u

Página 180

2 15 u

3 $dist\,(P, \pi) = \dfrac{67}{30}\sqrt{6}$ u; $dist\,(Q, \pi) = 0$ u

4 2,21 u

5 0,78 u

Página 183

6 a) 13 u

b) 0 u

Página 184

1 $\sqrt{115}$ u^2

2 5 u^3

Página 185

1 a) $x - y + z - 3 = 0$. Es un plano: el plano mediador del segmento AB.

b) $x + z - 2 = 0$. Son dos planos.

c) $x - 3y + 2z - 4 = 0$. Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 186

2 Es una esfera de radio 1. Su centro es (–1, 5, 0).

3 El radio de la circunferencia es $\sqrt{153}$.

4 $(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9 \rightarrow$ Es una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.

Página 187

5 $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{144} + \dfrac{z^2}{169} = 1 \rightarrow$ Es un elipsoide.

6 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ Es un hiperboloide.

7 $x = y^2 + z^2 \rightarrow$ Es un paraboloide.

Página 188

1 Hazlo tú.

$A'(3, -5, 2)$

2 Hazlo tú.

$A'(2, 7, 2)$

Página 189

4 Hazlo tú.

Hay dos puntos: $A_1(0, 3, 1)$ y $A_2(2, 1, 5)$

5 Hazlo tú.

a) $\sqrt{2}$ u b) $\alpha = 45°$

6 Hazlo tú.

Estas rectas son paralelas para $k = 1$.

$dist\,(r, s) = 5\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ u

Página 190

7 Hazlo tú.

a) $\vec{d}_r(1,-1,2)$; $\vec{d}_s(1,1,-1)$; $\overrightarrow{P_rP_s} = (1, 0, 5)$

Los vectores son linealmente independientes, no están en un mismo plano, por tanto, r y s se cruzan.

b) Hay dos planos que verifican la condición:

$\pi: -x + 3y + 2z + 7 = 0$

$\pi': -x + 3y + 2z - 21 = 0$

8 Hazlo tú.

$$s: \begin{cases} x + 12y + 5z - 9 = 0 \\ x + \ \ 2y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

Página 192

10 Hazlo tú.

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (z-3)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{44}{9}$$

Es la ecuación de una circunferencia.

Página 193

1 $A(-1, 3, 2)$ $\qquad$ $dist(P, r) = 2\sqrt{2}$ u

2 $\begin{cases} a - b = \sqrt{3} \\ a - b = -\sqrt{3} \end{cases}$

3 a) $dist(Q, r) = \sqrt{6}$ u

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow$ Son linealmente independientes y por tanto no coplanarios.

c) $dist(r, s) = \sqrt{6}$ u

4 $s: (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(8, 2, -4)$

5 a) $r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 1)$

b) $P = \left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$

Página 194

1 a) $\alpha = 45° \ 33' \ 42''$ $\qquad$ b) $\alpha = 90°$ $\qquad$ c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *rad*

2 $m = -3$

3 a) $\alpha = 90°$ $\qquad$ b) $\alpha = 0°$ $\qquad$ c) $\alpha = 60°$

4 a) $35° \ 15' \ 52''$ $\qquad$ b) $50° \ 47'$

5 a) $\hat{A} = 42° \ 23' \ 31''$; $\hat{B} = 90°$; $\hat{C} = 47° \ 36' \ 29''$

b) $\hat{A} = 11° \ 42' \ 6''$; $\hat{B} = 153° \ 54' \ 56''$; $\hat{C} = 14° \ 22' \ 58''$

6 • El ángulo que forma π con el eje X es: $\alpha = 24° \ 5' \ 41''$

• El ángulo que forma π con el eje Y es: $\beta = 54° \ 44' \ 8''$

• El ángulo que forma π con el eje Z es: $\gamma = 24° \ 5' \ 41''$

7 $m = \sqrt{2}$, $m = -\sqrt{2}$

8 a) $P = (0, 2, 3)$ $\qquad$ b) $Q = (8, 2, -3)$ $\qquad$ c) $dist(P, Q) = 10$ u

9 a) 0,2 u $\qquad$ b) 1,633 u $\qquad$ c) 0 u $\qquad$ d) 7 u

10 $dist(Q, \pi) = 4$ u

11 a) 1,12 u

b) Los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, por lo que los planos se cortan. La distancia es, por tanto, cero.

12 a) 0,6 u $\qquad$ b) 0 u

13 a) $\pi: 4x + y - 3z + 5 = 0$ $\qquad$ b) $Q(0, 1, 2)$

c) $dist(P, r) = 5$ u

Página 195

14 a) $\overrightarrow{PQ}(1, 1, -7)$ $\qquad$ b) $\sqrt{650}$ u^2

c) $dist(P, r) = 5$ u

15 a) $\overrightarrow{PQ}(7, -3, 17)$ $\qquad$ b) $\sqrt{30\,082}$ u^2

c) $dist(P, r) = 13$ u

16 a) $\pi: 3x + 4y + 40 = 0$ $\qquad$ b) 10 u

17 $\pi: -84x + 35z - 1\,253 = 0$ $\qquad$ 13 u

18 a) $\overrightarrow{PQ} = (3, 0, -3)$ $\qquad$ b) $V = 60$ u^3

c) Área $= \sqrt{314}$ u^2 $\qquad$ d) $dist(r, s) = \frac{60}{\sqrt{314}}$ u

19 a) 56,08 u^2

b) Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados: $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

20 a) 5 u^3 $\qquad$ b) 5 u^3

21 Área total = 140,02 u^2

Volumen = 51,33 u^3

22 50 u^3

23 La ecuación del plano es: $2x + 3y + 4z - 1 = 0$

Volumen $= \frac{1}{144}$ u^3

24 a) No tiene término en z^2. No es una esfera.

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales.

$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$

d) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

e) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales.

$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$

f) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales.

$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$

g) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales.

$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$

25 a) $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 1$

b) $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$

c) $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$

d) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$

26 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2$

27 $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 28x + 14y + 24z + 27 = 0$

Es la ecuación de una circunferencia.

28 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$

Es la ecuación de una circunferencia de centro el punto medio entre A y B.

Página 196

29 $P = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $P' = \left(\frac{5}{8}, -\frac{19}{8}, -\frac{3}{8}\right)$

30 a) $5x + 7y - z + 3 = 0$

b) $\begin{cases} x = 20\lambda \\ y = -\frac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - 19\lambda \end{cases}$

c) $\alpha = 90° - 60° = 30°$

31 $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

32 $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$

33 a) $p = 6$

b) • Punto de intersección: $(0, 1, 0)$

• Ecuación del plano: $8x + 5y - 11z - 5 = 0$

34 $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

35 $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$

36 Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$.

37 Hay dos planos:

$x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

38 a) $t: \begin{cases} 20x - 4y - 26z + 52 = 0 \\ 17x + 5y - 20z + 19 = 0 \end{cases}$

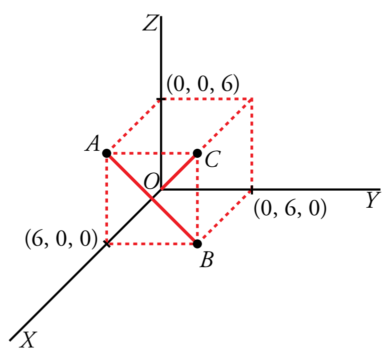
b) $\sqrt{42}$ u

39 a) $a = 3$

b) $a = \frac{-3}{10}$

c) *Soluciones:* $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

40



$dist\,(r, s) = \sqrt{6}$ u

41 $x + 3y + 2z - 14 = 0$

42 P' es el simétrico de P respecto del plano α.

$P'(2, -1, 1)$

P'' es el simétrico de P respecto de la recta r.

$P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

43 a) Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

b) Para $(0, 0, 0)$ el punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ el punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

44 a) $\frac{-2}{1} \neq \frac{-2}{2} \rightarrow$ Los puntos no están alineados, son vértices de un triángulo.

b) $2\sqrt{2}$ u

45 a) $\sqrt{10}$ u

b) Hay dos posibles soluciones:

$A\left(-\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{1}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$

$A'\left(\frac{2}{3}\sqrt{10}, -\frac{1}{3}\sqrt{10}, -\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$

Página 197

46 El punto es $P'(5, 1, 2)$.

La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P': $dist\,(P, P') \approx 2{,}83$ u

47 a) No tienen las coordenadas proporcionales, luego los puntos no están alineados.

$A_{\text{TRIÁNGULO}} \approx 1{,}12$ u^2

b) Altura $= \frac{2}{\sqrt{5}}$ u Volumen $= \frac{1}{3}$ u^3

48 $D(3, -3, 5)$; $F(8, 9, 3)$; $G(10, 6, 8)$; $V = 33$ u^3

49 Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

Área $= \frac{10}{3}$ u^2

50 r': $\begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$

51 Los puntos que dan la mínima distancia son:

$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ y $S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{6} + \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \lambda \end{cases}$$

52 a) $S(4, 1, 1)$ b) $2{,}5$ u^2

53 a) $2x - 2y - z - 1 = 0$ b) $4{,}24$ u

54 $\alpha = 71°\ 33'\ 54''$

55 a) s: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) π: $-2x - y + z = 0$ t: $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

c) Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

56 a) $3{,}54$ u b) $S_1(1, -3, 1)$; $S_2(1, 1, 5)$; $S_3(1, 3, -3)$

57 $x + 2y + 2z - 3 = 0$

58 Eje $OX = \frac{1}{\sqrt{17}}$ u; eje $OY = \frac{3}{\sqrt{10}}$ u; eje $OZ = 3$ u

59 a) $a = -2$; $b = 2$ b) $O'\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$

60 Los puntos son $C(2, 1, 1)$ y $C'(0, 0, 1)$.

61 π: $2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Ecuación de un plano.

- Veamos que π es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) \parallel \overrightarrow{AB}$

  Luego $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB:

  $M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2\right)$

  $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$

El plano π es el *plano mediador del segmento AB*.

62 $x + 2y - 2z + 2 = 0$; $2x - y - 1 = 0$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α *y* β.

Página 198

63 Son dos rectas: r: $\begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$.

64 a) $x + 2y + 5z + 30 = 0$; $19x - 22y + 5z + 60 = 0$

Son *los planos bisectores* del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Hay dos puntos: $Q_1(0, -15, 0)$ y $Q_2\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$

65 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0 \rightarrow$ es el *plano mediador* del segmento que une P y Q.

dist $(P, \pi) \approx 2{,}45$ u

66 a) $z - 1 = 0$

b) $P'(1, 2, -1)$

67 $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{16}{5}$

68 Centro: $Q(1, 0, 0)$. Radio: $r = 4$

69 a) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$

b) $x + 2y + 2z - 9 = 0$

70 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{5} = 1 \rightarrow$ Es un *elipsoide*.

71 $x^2 + y^2 - 12z = 0 \rightarrow$ Se trata de un *paraboloide*.

72 $-\dfrac{x^2}{21} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{21} = 1 \rightarrow$ Es un *hiperboloide*.

73 $16x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 64x - 128z + 208 = 0 \rightarrow$ Se trata de un *elipsoide*.

74 $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 8y - 4z + 10 = 0 \rightarrow$ Se trata de un *paraboloide*.

75 a) I) Falso. II) Verdadero. III) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Falso

d) Verdadero.

e) Verdadero.

f) Falso.

g) Verdadero.

h) Verdadero.

76 Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.

La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$$dist\,(A, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|} =$$

$$= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

77 a) *dist* (r, s) = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\overrightarrow{AB},\ \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r y a s, tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p, es la intersección de los planos α y β, siendo:

α: Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir: α: $det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, donde $X = (x, y, z)$

β: Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir: β: $det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

$$\text{Por tanto, } p: \begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

78 *dist* $(A, B) = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$; *dist* $(A, C) = 2\sqrt{2}$;

dist $(B, C) = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$

Los lados AB y BC miden lo mismo, luego el triángulo es isósceles.

Página 199

79 a) Los vértices son:

$$R\left(\frac{4 + \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right) \text{ y } S\left(\frac{4 - \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$$

b) El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$ u

80 $P(-1, 0, -1)$

81 Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 4 y 3.

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 3.

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 4.

Es un *elipsoide*.

82 *Centro:* $(2, -1, 2)$; *Semiejes:* 3, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

83 Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 2.

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 3.

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 3 y 2.

Es un *hiperboloide*.

84 a) $6x - 5y + 3z = 0$

b) $k = \dfrac{-12}{7}$. El plano es $-21x - 35y + 12z + 45 = 0$

c) $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) $a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$

e) $5x + 13y + 11z - 45 = 0$

Autoevaluación

1 a) $\frac{4}{7}\sqrt{2}\sqrt{7}$ u b) $A' = (0, -2, -3)$

c) $(\widehat{s, \pi}) = arc\ sen \frac{3}{\sqrt{35}}\sqrt{2}$

2 a) $\pi: -x + 3y - 2z - 6 = 0$

b) $\overrightarrow{PQ} = (3, 7, -1) - (5, 1, 3) = (-2, 6, -4) =$

$= 2(-1, 3, -2) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{n_\pi} \rightarrow \pi \perp \overrightarrow{PQ}$

$M = (4, 4, 1)$

$-4 + 12 - 2 - 6 = 0 \rightarrow M \in \pi$

Luego π es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

c) $3\sqrt{14}$ u^2

d) 6 u^3

3 $A' = (9, 1, 0)$

4 a) $\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0 \rightarrow \overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{n_\pi} \rightarrow r \,//\, \pi$

dist $(r, \pi) = 1$ u

b) $s: \begin{cases} \overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{d_r} = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 1) \end{cases}$ $t: \begin{cases} \overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 2) \end{cases}$

dist $(s, t) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ u

5 a) $t: \begin{cases} 3x + 5y - z - 30 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$

b) *dist* $(r, s) = \frac{3\sqrt{210}}{14}$ u

6 a) El radio es 5, y el centro, $C(2, 0, -1)$.

b) $r = 4$ u