DOSSIER SEMANAL 06

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & m & k \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde α, β, m, k son parámetros reales. Se pide:

a) Determina si existe algún valor de los parámetros que haga **invertible** a las matrices A y B.
b) **Calcula** la matriz A^{2020}
c) Calcula **la inversa de la matriz B**
d) Para $m = k = 2$, **resolver**, si es posible, la ecuación matricial

$$XB = A$$

a) En primer lugar, se observa fácilmente que ambas matrices son triangulares superiores y, por tanto, su determinante coincide con el producto de los elementos de la diagonal principal. Así pues:

$$|A| = 0 \qquad\qquad |B| = 1$$

Como conclusión, podemos decir que la **matriz A es siempre singular** (porque su determinante es cero independientemente del valor de los parámetros) y que la matriz **B es siempre invertible** (o regular) ya que su determinante siempre es 1.

b) Para calcular A^{2020} realizaremos las primeras potencias de la matriz A para observar si existe algún patrón que nos ayude:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de la potencia de exponente 3, todas las siguientes proporcionan de resultado la matriz nula. Por tanto:

$$A^{2020} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Calcularemos la inversa de B utilizando el método de adjuntos:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj^T(B)$$

Dado que ya sabemos el valor de su determinante ($|B| = 1$), calcularemos primeramente la matriz de adjuntos:

$$B_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$B_{21} = -\begin{vmatrix} m & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -m \qquad B_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$B_{31} = +\begin{vmatrix} m & k \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - k \qquad B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & m \end{vmatrix} = -m \qquad B_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto, **la inversa de la matriz B será**:

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ m^2 - k & -m & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 - k \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Resolvamos la ecuación algebraicamente, en primer lugar:

$$XB = A$$
$$XB \cdot B^{-1} = A \cdot B^{-1}$$
$$X = A \cdot B^{-1}$$

Dado que la matriz B sabemos que es invertible, esta relación es viable y podemos calcular el valor de la matriz X. Tan solo necesitamos la matriz B^{-1} (pero ya la hemos obtenido en el apartado anterior). Únicamente hemos de sustituir los parámetros por los valores indicados:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 - k \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{m=k=2} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -2\alpha + \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real m:

$$\left.\begin{aligned} mx+y+z&=1\\ y+z&=1\\ x+my+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{aligned} mx+y+z&=1\\ y+z&=1\\ x+my+z&=2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1 & 2 \end{array}\right)=A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real m:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=(m+1)-(1+m^2)=-m^2+m=-m\cdot(m-1)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro m, anulan este determinante. Es decir:

$$|A|=-m\cdot(m-1)=0 \Rightarrow \quad m=0 \text{ ó } m=1$$

Esto nos permite **distinguir tres casos posibles**:

CASO I: $m\neq 0 \ y \ m\neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} m & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1 & 2 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como <u>**SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**</u>. $$R(A)=R(A^*)=3=NUM.INCÓGNITAS$$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix}}{-m \cdot (m-1)} = \frac{0}{-m \cdot (m-1)} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-m \cdot (m-1)} = \frac{(m+1)-(1+2m)}{-m \cdot (m-1)} = \frac{-m}{-m \cdot (m-1)} = \frac{1}{m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix}}{-m \cdot (m-1)} = \frac{(2m+1)-(1+m^2)}{-m \cdot (m-1)} = \frac{-m^2+2m}{-m \cdot (m-1)} = \frac{-m \cdot (m-2)}{-m \cdot (m-1)} = \frac{m-2}{m-1}$$

Así pues, la solución del sistema en este caso es:

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{1}{m-1}, \frac{m-2}{m-1}\right)$$

CASO II: $m = 0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es claramente <u>**INCOMPATIBLE**</u>, ya que la primera y tercera ecuación tienen los mismos coeficientes, pero diferentes términos independientes. Se aprecia muy fácilmente aplicando Gauss: $$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-F1]{} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ Así pues, aquí se cumple que: $$2 = R(A) \neq R(A^*) = 3$$

CASO III: $m = 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es **<u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>**, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden, pero este valor es menor que el número de incógnitas. Se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss: $$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3'=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Por tanto, se observa que: $$R(A) = R(A^*) = 2 \neq Num.\,incógnitas$$

Resolvamos el sistema aprovechando la aplicación del método de Gauss realizado en la discusión. En este caso, observamos que disponemos de un grado de libertad, por tanto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad con\ \mu \in R$$

PROBLEMA 3: Averigua razonadamente **el valor del determinante** de una matriz cuadrada A de orden 4 para la cual se cumple que $|-2A \cdot A^3 \cdot A^{-1}| = 128$

Para resolver este problema, aplicaremos simplemente las propiedades básicas de los determinantes:

$$|-2A \cdot A^3 \cdot A^{-1}| = 128$$

$$(-2)^4 \cdot |A| \cdot |A^3| \cdot |A^{-1}| = 128$$

$$16 \cdot |A| \cdot |A|^3 \cdot \frac{1}{|A|} = 128$$

$$16 \cdot |A|^3 = 128$$

$$|A|^3 = \frac{128}{16}$$

$$|A|^3 = 8$$

$$|A| = \sqrt[3]{8} = 2$$

Por tanto, el valor del **determinante de dicha matriz de orden 4 es $|A| = 2$**