MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 10 (1), 2017 doi: 10.4995/msel.2017.6697.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Matemáticas Dialógicas. 'Yo soy de mates'
Dialogic Mathematics 'I'm good at math'

Javier Díez-Palomar
Universitat de Barcelona
jdiezpalomar@ub.edu

Abstract

En este artículo se hace una presentación del enfoque de las matemáticas dialógicas a través de tres actuaciones educativas de éxito (AEE): los grupos interactivos, la formación en matemáticas de familiares, y las tertulias matemáticas dialógicas. El objetivo es ilustrar a través de tres ejemplos cómo funcionan dichas AEE, que los estudios previos han demostrado que contribuyen a mejorar los aprendizajes de las matemáticas. Se concluye que el enfoque del análisis de las interacciones abre las puertas a comprender mejor cómo aprendemos matemáticas, y la creación de espacios dialógicos basados en dichas contribuciones puede ser una oportunidad para mejorar las puntuaciones de matemáticas de nuestros estudiantes.

In this article I introduce the dialogic mathematics approach, drawing on three successful educational actions (SEAs): interactive groups, family involvement in mathematics, and dialogic mathematics gatherings. The main aim is to illustrate through these examples how SEAs, which previous studies have proved that contribute to improve mathematics learning, work. I conclude that looking at interactions may open the floor to better understand how we learn mathematics, while the creation of dialogic spaces based on such contributions may also be an opportunity to improve students' mathematics achievement.

Keywords: Dialogic mathematics, successful educational actions, interactions.
Palabras clave: Matemáticas dialógicas, actuaciones educativas de éxito, interacciones.

1. El enfoque Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM) en la enseñanza de las matemáticas

Actualmente existe una gran preocupación alrededor de los resultados académicos que obtienen los y las estudiantes en matemáticas, ciencias y comprensión lectora. Esta preocupación no es nueva. Ya en los años cuarenta del siglo pasado, tras la Segunda Guerra Mundial, y en el contexto de la Guerra de Bloques, las dos grandes potencias se sumergieron en una carrera por la supremacía científica y tecnológica ilustrada por la carrera espacial. Estados Unidos lideró un movimiento de reforma del currículum de matemáticas (la *New Mathematics*) que coincidía en algunos puntos fundamentales con el movimiento de la *Matemática Moderna* iniciado por el grupo Bourbaki en la década de los años veinte, en Europa (Klein, 2003). La idea era poner las bases para la enseñanza científica de las matemáticas (se creó un cuerpo coherente de explicaciones lógicas de los procedimientos matemáticos, como algoritmos, etc., para ser enseñado en las escuelas) a fin de lograr producir "vocaciones científicas" y mejorar la calidad de la formación matemática de la población. Medio siglo después de aquellos debates, de nuevo regresa la preocupación por la falta de vocaciones científicas: cada vez hay menos jóvenes que desarrollan sus carreras en el ámbito de las ingenierías, de la tecnología, de las ciencias o de las matemáticas. Los resultados sobre el sistema de enseñanza español del INE (Instituto Nacional de Estadística) revelan un descenso en la matrícula en carreras de "ciencias". La existencia de programas como el *Plan de Fortalecimiento de la Investigación Científica, el Desarrollo Tecnológico y la Innovación en las Universidades Nacionales* (Ac. Pl. Nº 676/08 y 687/09) donde el Consejo Interuniversitario Nacional ofrece *Becas para el estímulo a las vocaciones científicas* ilustra la realidad de esta situación. En España ya se está empezando a hablar de STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics).

El enfoque STEM de la educación trata de hacer frente a la falta de profesionales con formación especializada en los cuatro ámbitos que han detectado diversas naciones (English, 2015).

> *Por ejemplo, el Director Científico de Australia enfatizó en una lectura reciente que STEM está "en el centro de prácticamente todas las agendas" y que es "la mayor preocupación universal actual que enmarca los planes de todo el Mundo" (Chubb, 2014). En los Estados Unidos, el informe de 2013 del Comité sobre la Educación STEM mantenía que "los trabajos del futuro serán trabajos STEM", con competencias STEM requeridas no solo en, sino también fuera de, las ocupaciones específicas de STEM (National Science and Technology Council, 2013, p. vi). (English, 2015, p. 4)*

En este contexto internacional, la preocupación por la medición de las puntuaciones académicas en matemáticas y ciencias toma cada vez más relevancia. Estudios internacionales tales como PISA han sido citados muchas veces como fuente para comparar los resultados obtenidos por estudiantes en diversos países que implementan políticas y actuaciones educativas dispares. También se acostumbran a utilizar para obtener una mirada longitudinal a través del tiempo para ver la evolución de los aprendizajes en estos ámbitos, como indicador del impacto (o no) que tienen las actuaciones educativas y los planteamientos curriculares.

En el caso de España es sabido que ocupamos una posición modesta dentro del conjunto de los países de la OCDE que participan en PISA. En los últimos datos publicados correspondientes a PISA 2012, España está por debajo de la media de los países de la OECD, con una puntuación media de 484 puntos en matemáticas, 488 puntos en comprensión lectora, y 496 en ciencias[1].

[1] Para más información ver https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf

Este rendimiento se ha ido manteniendo en cotas similares desde el primer estudio que la OECD publicó en 2003, a pesar que durante este periodo de tiempo de acuerdo a los datos disponibles se ha experimentado un incremento de hasta un 35 % en el gasto en educación. Los resultados desglosados por Comunidades Autónomas indican resultados similares, a pesar de que hay algunas regiones españolas que superan la media Europea (489 puntos).

De acuerdo a estudios internacionales sobre educación y *professional training* la discrepancia de resultados entre diversos países se debe, entre otros factores, a la calidad de la formación profesional del profesorado, la orientación de las políticas educativas, o el uso de evidencias basadas en la investigación educativa como referente para el diseño e implementación de actuaciones educativas concretas (*research-based learning*). Los datos de que disponemos indican que en escuelas donde se utilizan actuaciones avaladas por la comunidad científica internacional, como es el caso de las Comunidades de Aprendizaje, las cifras de puntuaciones medias en las diferentes competencias del currículum acostumbran a ser superiores que las medias de la región donde se encuentra dichos centros.

En este artículo me voy a centrar en el caso del aprendizaje de las matemáticas, y en concreto de la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque dialógico. Mi objetivo es presentar tres casos de *actuaciones educativas de éxito* (AEE), tal y como se definen en Flecha (2015). Para ello primero hablaré del reto que supone la enseñanza de las matemáticas. Después, analizaré lo que denomino "matemáticas dialógicas" desde tres AEE: los grupos interactivos de matemáticas, la formación en matemáticas de las familias y, por último, las tertulias matemáticas dialógicas. Al hacerlo trataré de conectar tanto práctica como teoría, para clarificar las conexiones entre la implementación de cada una de las AEE, con las evidencias que la investigación internacional ha probado previamente.

2. El reto de enseñar matemáticas

Enseñar matemáticas no es fácil. George Pólya dijo que la profesión del maestro/a de matemáticas probablemente sea una de las más bonitas y gratificantes; pero también es una profesión difícil, que implica una gran responsabilidad. Los maestros y las maestras de matemáticas tienen el privilegio de ver cómo se les iluminan los ojos a los niños y a las niñas cuando descubren las matemáticas. La dificultad viene cuando se tiene que buscar el "siete y medio" a la hora de diseñar los problemas que se les van a poner en clase: tienen que ser suficientemente difíciles para que supongan un reto que sea atractivo; pero no tan difíciles como para acabar generando frustraciones en el/la estudiante. La matemática muy fácil aburre; la que es muy difícil profesa rechazo y odio (Pólya, 1945).

La imagen social de la matemática contribuye en mucho a dificultar esta tarea. Las matemáticas son "difíciles", "abstractas", "precisas", "desconectadas", "aburridas", pero también "importantes", "necesarias". Muchas personas sufren de lo que se conoce como ansiedad matemática (Hembree, 1990), con un claro impacto sobre las posibilidades de aprendizaje (Ma, 1999; Vukovic, Kieffer, Bailey & Harari, 2013). Ante situaciones en las que aparecen números, o es necesario realizar algún cálculo y aplicar algún algoritmo, algunas personas dicen "yo soy de letras", para excusarse y evitar cualquier otra relación con la matemática. Nadie presume de "ser analfabeto". No es atractivo. En educación de personas adultas la identidad y el "empoderamiento" son aspectos clave que regulan no solo las emociones personales, sino también la actitud frente al aprendizaje de las personas que no han tenido la oportunidad de aprender a leer ni a escribir. Pero en matemáticas continúa existiendo una brecha demasiado grande entre lo que se entiende como "saber matemáticas formales" y las "matemáticas de la vida cotidiana" (Díez-Palomar, 2004).

En la escuela las matemáticas también presentan una clara imagen social. ¿Existe alguna relación entre obtener buena puntuación en matemáticas y no ser un estudiante problemático/a? La investigación previa en didáctica de las matemáticas ha destinado muchos esfuerzos a tratar de conseguir que todos los estudiantes aprendan matemáticas; especialmente aquellos y aquellas que son más problemáticos. Parece que existe una relación entre la posición que un estudiante ocupa respecto del grupo de iguales y sus resultados académicos (Webb, 1989). Estudios como los de Ryan (2001), Schwartz, Groman, Nakamoto y McKay (2006), Wentzel y Caldwell (1997) sugieren que los estudiantes agresivos incrementan su popularidad en la medida que empeoran sus resultados académicos. Para estos estudiantes "sacar malas notas" es un símbolo de identidad dentro del grupo. Durante los años sesenta y setenta del siglo anterior el bajo rendimiento de estos estudiantes se concebía como una consecuencia de las desigualdades sociales y/o étnicas. En la década de los noventa los estudios de género y masculinidad re-definieron el problema como una consecuencia de *boys being boys*, es decir, de chicos "duros" que para mostrar su virilidad tenían que usar la violencia; sacar malas notas era parte de esa imagen (Foster, Kimmel & Skelton, 2001). La idea de "rebelión", del chico malo, de la resistencia a la norma establecida, se asocia con comportamientos violentos y con la obtención de malos resultados académicos. Este tipo de contextos crean una fractura cada vez más grande entre el desarrollo de valores positivos hacia la escuela y la posibilidad de convertirse en líder del grupo de iguales. Epstein (1998), por ejemplo, describió como los *bad boys* (chicos malos) basaban su masculinidad y su popularidad en la resistencia hacia las normas escolares (*scholing*), y el rechazo de lo *sissi* (fi-fi), por representar la imagen de "blando".

Los autores más relevantes en ciencias de la educación han destacado que el contexto [social] tiene un peso preponderante sobre los resultados académicos que obtienen los y las estudiantes. La investigación de Vygotsky, Bruner, Freire, Flecha y otros autores, lo demuestra. Vivir un contexto en el que el "sacar buenas notas" es visto como no deseable, genera una situación no propicia para la enseñanza y aprendizaje ni de las matemáticas, ni de ninguna otra asignatura. Para lograr enseñar algo de matemáticas es necesario transformar el contexto y convertirlo en una situación donde el aprendizaje de las matemáticas sea algo atractivo y deseable.

Por otro lado, las matemáticas también son difíciles en sí mismas, porque se refieren a procesos de razonamiento y conocimientos a veces no del todo evidentes y que precisan de una comprensión en términos cognitivos. Su propia naturaleza provoca que cuando las usamos podamos cometer errores, o incluso que tengamos concepciones erróneas (*misconceptions*) sobre determinadas nociones. De acuerdo con Drews (2011) las concepciones erróneas son incluso más problemáticas que los errores. Mientras que éstos pueden deberse a falta de atención, mala interpretación del enunciado, lectura rápida y poco cuidadosa, desconocimiento de ciertos símbolos, reglas o algoritmos, o falta de experiencia con tareas similares, aquéllas tienen su origen en concepciones que entran en conflicto con los significados matemáticos aceptados. Por ejemplo, cuando construimos el esquema cognitivo número lo hacemos juntando una serie de premisas, como por ejemplo: que son símbolos que se refieren a cantidades (valor cardinal), que son símbolos que se pueden ordenar (valor ordinal), que un número "a la derecha" es siempre mayor que un número "a la izquierda" en la línea numérica, que el número posterior es siempre "más grande" que el anterior, que un número de tres cifras siempre es "más grande" que otro de dos cifras, etc. Sin embargo, situaciones como tener 4.23 y 4.8 claramente contradicen algunas de las afirmaciones que acabamos de hacer. Eso hace que las matemáticas sean cognitivamente difíciles de aprender; porque exigen resolver diversas situaciones conflictivas, que rompen con nuestra experiencia previa sobre el concepto que estamos aprendiendo a usar.

Además, la investigación también ha demostrado que existen dificultades epistemológicas inherentes a la propia matemática, *per se*. Por ejemplo, Tall y Vinner (1981) en un trabajo sobre la enseñanza del concepto de límite que publican en 1981 plantean que las dificultades que algunos estudiantes tienen para comprender el concepto de límite vienen dadas por un conflicto entre la imagen conceptual de límite y la definición formal del mismo concepto. Mientras que la imagen que tienen los/as estudiantes del concepto límite es dinámica (cuando x se aproxima a a, provoca que la función $f(x)$ se aproxime al límite, pero sin alcanzarlo nunca), la definición formal es no-intuitiva

> *el número L es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al número a si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Otro caso famoso de "dificultades epistemológicas" es el concepto de derivada, por ejemplo (Pino-Fan, Godino, Font & Castro, 2013). De nuevo vemos que aparece conflicto entre estilos de enseñanza más geométricos:

> *la derivada es la pendiente de la recta tangente a la representación gráfica de $f(x)$ en el valor x), que puede aproximarse encontrando la pendiente de la secante de la forma*

$$m_{\text{secante}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

algebraicos:

$$f'(x) = \text{lím}\, \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

cuando el límite Δx tiende a 0, entre otros enfoques (Dolores, 2000).

Enseñar matemáticas, por tanto, es difícil no solo por la propia dificultad inherente a la matemática en si (dimensión instrumental); también es complicado porque los maestros y las maestras (especialmente en secundaria) deben afrontar situaciones contextuales complejas, en las que las interacciones se mueven no alrededor de temas académicos, sino de otro tipo de aspectos. En este artículo abordo este segundo tipo de aspectos. Mi objetivo es ilustrar tres AEE que han mostrado que contribuyen a mejorar los aprendizajes de matemáticas de los niños y de las niñas.

3. Las matemáticas dialógicas

Actualmente existe un interés cada vez más marcado sobre el papel que juegan las interacciones y el diálogo en el aprendizaje de las matemáticas (Bakker, Smit & Wegerif, 2015). ¿Cuáles son las estrategias, las metáforas, que utilizan maestros/as y estudiantes aventajados para explicar las nociones matemáticas? ¿Qué tipo de discursos utilizan y cuáles son más o menos clarificadores? hace dieciséis años Lerman (2000) publicó un capítulo donde hablaba sobre el giro social en la investigación en la didáctica de la matemática. Su escrito recogía el testigo de dos décadas de investigación en las que diversos autores y autoras habían mostrado cómo el contexto social y cultural tenía un impacto notable en las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas de niños y niñas pobres y/o de grupos culturales vulnerables, asistiendo a escuelas con pocos recursos (Bishop, 1988; Carraher, Carraher, & Schliemann, 1985; Cobb & Yackel, 1996; D'Ambrosio, 1985).

Los desarrollos más recientes de la investigación parecen sugerir que estamos asistiendo a un giro dialógico en la investigación, puesto que se considera que el lenguaje (sea oral, algebraico, numérico, geométrico, o cualquier otra representación semiótica de las matemáticas) es el medio que podemos "ver y analizar" para entender cómo los niños y las niñas entienden y aprenden matemáticas. La combinación entre marcadores comunicativos (a través de alguna de las manifestaciones del lenguaje) y marcadores neuronales (que ofrecen una representación "física" de las estructuras neuronales involucradas en las nociones matemáticas y los procesos cognitivos de aprendizaje) están abriendo una verdadera revolución en nuestra capacidad para comprender cómo funciona el aprendizaje de las matemáticas (Ansari, & Lyons, 2016; Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, & Tsivkin, 1999; Díez-Palomar & Cabré, 2015), a fin de poder crear mejores materiales y estrategias para enseñarlas.

A continuación me voy a centrar en tres AEE identificadas en el proyecto INCLUD-ED.*Strategies for inclusion and social cohesion from education in Europe* (6th Framework Programme, European Commission): los grupos interactivos, la formación de familiares y las tertulias dialógicas, para ilustrar el pape que juega el diálogo y las interacciones en el aprendizaje de las matemáticas en primaria. Las AEE se definen como aquellas actuaciones educativas que los datos procedentes de la investigación muestran que producen éxito académico (en términos de lograr superar los mínimos establecidos por las autoridades educativas como obligatorios para conseguir el "aprobado") y son transferibles a diferentes contextos geográficos, sociales, culturales, etc. Las evidencias siempre se obtienen en referencia a los instrumentos de evaluación oficiales definidos por las autoridades educativas competentes para ello (pruebas de competencias, pruebas de diagnóstico, etc.), tal y como ha sido ya publicado (Elboj & Niemelä, 2010, Flecha, 2015).

a) Los Grupos Interactivos de matemáticas

Los grupos interactivos (de ahora en adelante GI) son una agrupación de los/as estudiantes que se caracteriza por la formación de pequeños grupos de estudiantes (entre 5 y 7 estudiantes por grupo), heterogéneos en términos de género, cultura, etnia y, sobre todo, nivel educativo. Cada grupo está dinamizado por una persona adulta (o un compañero/a de un curso posterior), cuyo papel es incentivar el diálogo igualitario entre los/as miembros del grupo. Las actividades que se realizan están diseñadas por el maestro o la maestra, de acuerdo a su planteamiento de la lección. Las personas adultas actúan como voluntarios, que no deben dar las respuestas a las actividades. Son los niños y las niñas quienes tienen que ayudarse y justificar sus respectivas respuestas, con argumentos de validez (Habermas, 1984); es decir, argumentos que sean susceptibles que el resto de miembros del grupo los puedan verificar.

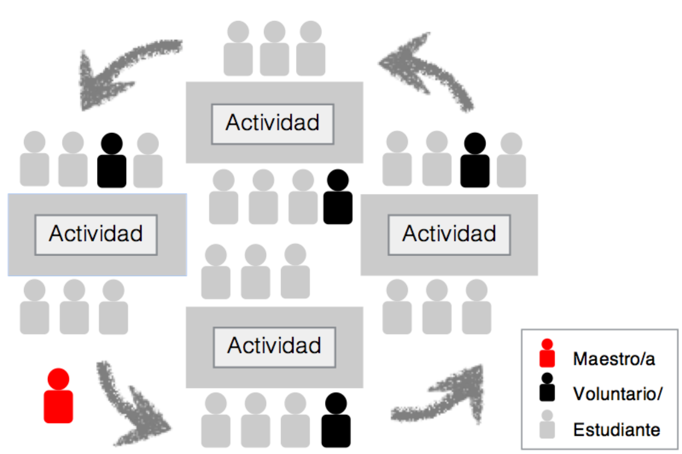

Figura 1: Estructura de funcionamiento de los grupos interactivos.

Esto *obliga* a cada niño/a a buscar argumentos válidos para cada concepto o noción de matemáticas que está trabajando, lo cual implica un esfuerzo y está en la línea del desarrollo de las competencias de comunicación, comprensión y resolución de problemas, razonamiento abstracto y cuantitativo, construcción de argumentos viables y crítica de los razonamientos de los demás, y modelización usando las matemáticas. Cada quince o veinte minutos, el maestro o la maestra anuncia el cambio de actividad. Cada niño/a se mueve al grupo siguiente, para realizar la siguiente actividad. De esa manera, siempre hay cuatro o cinco grupos funcionando a la vez; y al cabo del período destinado a la lección, todos los niños/as han pasado por todas las actividades (ver Figura 1).

Los GI parten de varias nociones contrastadas por las teorías educativas. Por un lado son una puesta en práctica de lo que Vygotsky (1978) denominó *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP). De acuerdo con el educador ruso, la ZDP se define como la distancia entre el nivel de desarrollo efectivo del alumno (aquello que es capaz de hacer por sí mismo/a), y el nivel de desarrollo potencial (aquello que sería capaz de hacer con la ayuda de un adulto o de un compañero más capaz). En 1976 Wood, Bruner y Ross publicaron un artículo donde analizaron el papel de la persona adulta cuando ayuda al niño/a a desarrollar su nivel cognitivo potencial, acuñando el concepto de *scaffoling*. Bruner y sus colegas mostraron que para que la ZDP funcione, es fundamental que la persona adulta aporte *pistas* (ayudas), para que los niños/as las usen como andamios sobre los que construir el nuevo conocimiento. En 2005 Lobato, Clarke y Ellis publicaron un artículo en el que discutían precisamente cuánto decir (o no decir) a los estudiantes para no bloquear su capacidad de construir nuevo conocimiento matemático, pero darles las "pistas" suficientes como para lograrlo. Paralelamente, Mercer y sus colaboradores se dedicaron a estudiar los tipos de habla para saber cuál es el más productivo en términos de aprendizaje (Mercer, Wegerif & Dawes, 1999). Afirman que no todos los tipos de habla conducen al mismo tipo de aprendizaje, y Mercer acaba proponiendo un modelo en el que distingue el habla de disputa, el habla acumulativa, y el habla exploratoria. Es este último tipo el que se relaciona con el aprendizaje de las matemáticas con comprensión (Mercer, 1996). En 2015 este enfoque se aplica a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y se muestra que el habla de tipo dialógico (basada en el intercambio de argumentos susceptibles de ser verificados por todos los miembros del grupo) es el tipo de habla que más oportunidades de aprendizaje crea (Garcia-Carrión & Díez-Palomar, 2015; Díez-Palomar & Cabré, 2015). Los GI son espacios que son heterogéneos para crear la posibilidad de que niños y niñas con niveles diferentes de comprensión de las matemáticas puedan ayudarse unos a otros a desarrollar sus respectivas ZDP, a través del uso del diálogo igualitario (Flecha, 2000).

Para ilustrar cómo funcionan los GI, y por qué esta AEE mejora los aprendizajes de matemáticas y se logra que los resultados académicos de los niños/as mejoren las medias de puntuaciones de referencia, voy a utilizar un estudio de caso.

Este estudio de caso procede de una investigación financiada por la *Fundación La Caixa* a través del programa de investigación *RecerCaixa*. El título de la investigación es *MSAT–Mathematics, Science and Technologies for All*. A lo largo de 2014-2015 y 2015-2016 se llevaron a cabo grabaciones de 10 sesiones (durante 10 semanas) en dos escuelas de primaria, una de infantil y otra de secundaria, respectivamente. En las sesiones se intervino organizando GI en donde al menos un grupo usaba tablets como recurso.

La tarea a realizar es sobre geometría de los poliedros. La primera parte se centra en identificar qué es y qué no es un poliedro de un grupo de cuerpos geométricos que aparecen en la pantalla. La segunda parte corresponde a una actividad que consiste en identificar las partes de un hexaedro regular, y realizar cálculos relacionados con los vértices y las aristas que lo componen (ver Figura 2). Esta segunda tarea aparece en la prueba de evaluación de primaria de la competencia matemática (curso 2013-2014), publicada por el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. Se facilita a los/as estudiantes la representación visual del hexaedro regular, construido con un modelo de varillas y bolas simulando los vértices en cada una de las esquinas del poliedro. A continuación se reproduce uno de los diálogos que ocurren en uno de los grupos que están realizando la actividad de los poliedros. Los niños/as trabajan en parejas, con una tablet para cada pareja.

Voluntario:	*A ver, ¿estamos todos en esta pantalla?*
Niña 1:	*¿En cuál?*
Niño 2:	*Apagón...*
Niño 2:	*Uy, ¿qué he hecho, tío?*
Niña 1:	*No veo, pero sí.*
Voluntario:	*Cogemos este, el primero...*
Niña 1:	*¿Cuál?*
Voluntario:	*Este, el primero...*
Niña 1:	*Yo no veo...*
Voluntario:	*[enseñando la pantalla de la tablet]. Esta pantalla. El primero. Sí, siempre el primero. Clica al primero. Ahora todo el mundo tenemos que escuchar a [niña 1] que nos va a leer el enunciado. [Niña 1] ¿puedes leer el enunciado?*
Niña 1:	*[Lee el enunciado] Selecciona los sólidos que no son poliedros.*
Voluntario:	*Vale, de estos cinco sólidos, tenéis que marcar los que no son poliedros. [Niño 3] este de aquí... ¿Qué es un poliedro?*
Niño 2:	*[levanta la mano y responde] Es un cuerpo geométrico, no me sale.... la superficie de [gesticula con las manos], es que no me sale...*
Niño 1:	*Cuatro caras.*
Niño 4:	*¡Uno parece una manzana, tío!*
Voluntario:	*Ahora, el que es de color verde, ¿es un poliedro?*
Niño 3:	*Noooo...*
Voluntario:	*¿Es un poliedro?*
Niño 1:	*Tiene cuatro caras.*
Niño 2:	*Tiene cuatro caras.*
Voluntario:	*Pero... ¿tiene caras planas o no tiene caras planas?*
Niño 2:	*Ah, bueno, Pero por arriba tiene un remolino, pero por los costados es plano.*
Niña 1:	*Pero es plano, ¿eh?*
Voluntario:	*¿Eso es un poliedro con un remolino?*
Niño 1:	*No.*
Niña 1:	*Entonces no es.*
Niño 2:	*El segundo tampoco.*
Voluntario:	*El segundo [niño 2] tampoco. ¿El tercero [niño 4]?*
Niño 4:	*El tercero sí.*
Voluntario:	*Sí que es un poliedro, vale. ¿El cuarto, este azul de aquí? [mirando lo que está haciendo el niño 1 y notando que está marcando los poliedros al revés]*
Voluntario:	*Es que tienes que marcar los que no son poliedros.*
Niño 1:	*Ah, los que no!*
Voluntario:	*¿Y el último? [niña 2] ¿Es un poliedro o no es un poliedro?*
Niño 2:	*No.*

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

La pregunta clave es *¿qué es un poliedro?* La persona voluntaria hace esa pregunta al grupo. El niño 2 levanta la mano y responde “es un cuerpo geométrico”, pero no sabe decir nada más, ni dar ningún otro detalle que permita a sus compañeros y compañeras del grupo el disponer de algún criterio válido para distinguir los poliedros de otros cuerpos geométricos. Pero entonces el niño 1 afirma “tiene cuatro caras”. El concepto “cara” sí que es un concepto importante en la definición de poliedro. El niño 1 lo sabe y por eso realiza dicha afirmación. Sus palabras también ilustran que existen niveles distintos de comprensión de los objetos geométricos. Hay un niño (al menos) que sí que sabe que las “caras” son parte de la definición de “poliedro”. Eso permite que se genere un diálogo sobre ese aspecto, como se ve en las intervenciones posteriores. En los GI la heterogeneidad abre la posibilidad a que aparezcan argumentos que pueden servir de “andamio” para que alguno de los/as miembros del grupo elabore explicaciones más correctas de las nociones que se trabajan. Por otro lado, el garantizar que el grupo es un entorno “seguro” en el que se pueden intercambiar diferentes argumentos (a través del diálogo igualitario) también abre la posibilidad a que aparezcan situaciones de aprendizaje. Si analizamos los diálogos precedentes desde un punto de vista de la teoría del aprendizaje dialógico (Flecha, 2000), buscando si el tipo de habla es o no dialógica (es decir, está marcada por pretensiones de veracidad o por pretensiones de poder), la sensación es que se trata de una discusión en la que cada uno trata de decir qué piensa sobre la noción “poliedro”. Quizás en este fragmento sí que podemos argumentar que el voluntario hace una intervención demasiado “dirigista”, cuando introduce el elemento de “cara plana” en la discusión. No pregunta si los poliedros tienen o no caras planas; en cambio, lo da por hecho al preguntar si el objeto que los niños/as han dicho que es un poliedro tiene o no las caras planas. No se explica por qué los poliedros tienen caras planas; se da por hecho. Este fragmento ilustra también el hecho que en situaciones reales de aula no podemos encontrar actos de habla totalmente dialógicos (o no dialógicos). Estas categorías son tipos ideales que nos permiten entender la complejidad de las interacciones entre los niños/as y la persona voluntaria o el maestro/a.

Después de este diálogo, la actividad continúa. Ahora los niños y las niñas tienen que averiguar cuántas varillas se encuentran en un vértice determinado: el vértice A (ver Figura 2).

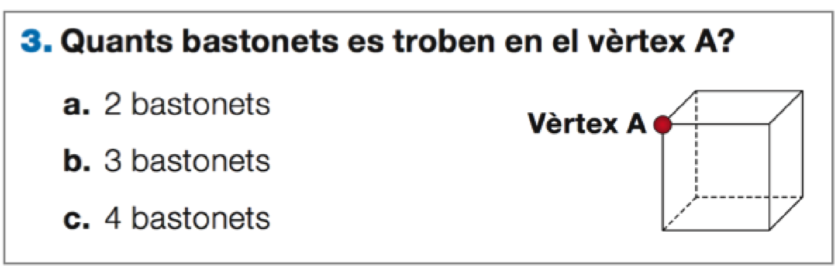

Figura 2: Enunciado de la actividad. Proves de la Competència de Matemàtiques a primària. Curs 2013-2014. Departament d’Ensenyament. Generalitat de Catalunya.

En el diálogo que sigue la discusión es sobre qué es un vértice. El niño 1 pregunta si el vértice son las líneas que delimitan el cuerpo geométrico. La niña 5 se levanta del grupo y se acerca a la niña 3, que aparentemente necesita ayuda para resolver la actividad. Las dos hablan mientras el resto del grupo continúa en la discusión sobre qué es o qué no es un vértice. Entonces, la niña 3 hace una afirmación clave: “las patas”. ¿Qué quiere decir con esta expresión? La niña mientras afirma “las patas”, va señalando con el dedo las aristas del cubo hasta el vértice marcado con la letra A. El voluntario verbaliza la respuesta de la niña al decir: “donde se juntan [las patas]”. La niña cuenta hasta cuatro vértices, y sigue contando. El niño 1 responde: “hay ocho”.

Voluntario:	*Dice, ¿cuántas varillas se encuentran en el vértice A?... [Un niño indica 4] ¿Estáis seguros que son cuatro?*
Niño 1:	*¿Qué era el vértice? ¿Las líneas?*
Voluntario:	*Los vértices son...*
Niña 5:	*[se levanta y se pone al lado de la niña 3, para ayudarla; no se oyen los diálogos]*
Niña 2:	*¡Dos!*
Niña 3:	*¡Las patas, las patas! [señalando con el dedo el punto común donde se unen]*
Voluntario:	*...donde se juntan...*
Niña 3:	*Uno, dos, tres, cuatro,....*
Niño 1:	*¡Hay ocho!*
Voluntario:	*En cada, en cada vértice, en este vértice, en el A, ¿cuántas aristas se juntan? Mirad el dibujo.*
Niño 1:	*Hay ocho.*
Niña 3:	*Un, dos, tres, cuatro?*

La actividad finaliza con el cálculo del perímetro del hexágono regular. En el enunciado se lee que si una varilla mide 4 centímetros, ¿cuánto miden en total las varillas que forman la Figura anterior? Aparecen tres opciones de respuesta: 16cm, 32cm, o 48cm.

Niño 1:	*Multiplicas dice por cuatro y te da cuarenta y ocho.*
Niño 4:	*Yo pensaba, yo pensaba...*
Niña 1:	*Ya pero es que no son 4.*
Voluntario:	*Claro, ¿cuántas varillas están contando?*
Niño 1:	*Doce.*
Niña 1:	*Mira, mira, aquí se ve bien.*
Niño 4:	*¡Aaahh!*
Voluntario:	*Y doce por cuatro son cuarenta y ocho, muy bien.*

Con este ejemplo únicamente he querido ilustrar cómo funcionan las interacciones en un GI. Los datos ya publicados sobre el impacto de la GI en el aprendizaje (Elboj & Niemelä, 2010, Flecha, 2015; Valls y Kiriakides, 2013) muestran que los niños y las niñas tienden a mejorar sus puntuaciones después de realizar series de sesiones usando GIs. En los GIs también podemos ver a partir del ejemplo anterior que aparecen múltiples oportunidades para que los niños/as verbalicen las matemáticas, que es una de las competencias fundamentales de aprendizaje de acuerdo con la mayoría de currícula actuales (NCTM, BOE, DOG).

b) La formación en matemáticas de las familias

Existe un cuerpo muy extenso de literatura científica previa que muestra el fuerte impacto que tiene la participación de las familias en actividades de formación sobre el aprendizaje de las matemáticas de sus hijos (Díez-Palomar, 2012, Fan & Chen, 2001; Jeynes, 2003). Pero cuando hablamos de "participación de las familias" en la educación de sus hijos/as tenemos que precisar qué significa eso. Hoover-Dempsey, Walker, Sandler, Whetsel, Green, Wilkins y Closson, en 2005, publicaron un artículo en el que presentaban un modelo sobre los diferentes formas de participación de las familias. Estos autores distinguen entre lo que llaman *home-based involvement* y el *school-based involvement*. En el primer caso existen tres enfoques diferentes: *modeling*, *reinforcement* y *direct instruction*. Las familias pueden o bien actuar como modelos para sus hijos/as (ser ejemplos de conducta y actitud hacia la escuela), o bien buscar recursos para reforzar el aprendizaje de las matemáticas de sus hijos (academias, profesores privados, etc.), o bien participar ellos y ellas mismas de la educación a través de actuaciones como hacer los deberes juntos, hacer preguntas sobre la materia, ayudar a estudiar, etc. En las Comunidades de Aprendizaje las familias también participan incluso dentro de la escuela, como voluntarios/as, en las actividades o en las decisiones que se toman; o a través de organizar y asistir ellas mismas a ciclos de formación (por ejemplo, los Talleres de Matemáticas para Familias).

En el proyecto INCLUD-ED que ya hemos citado más arriba se establecieron cinco tipos de participación de las familias en educación: informativo, consultivo, decisorio, evaluativo y educativo. El orden no es neutral: cada tipo supone un grado más en la involucración y participación de la familia en el centro escolar. En la participación informativa, las familias simplemente reciben información sobre las actividades escolares. Cuando la participación es consultiva, significa que las familias son consultadas, pero tienen un poder de decisión muy limitado. La participación se canaliza a través de los órganos del centro. En el caso de la decisoria, las familias sí que participan en los procesos de toma de decisión de la escuela. La evaluativa, además, implica que las familias participan en el proceso de aprendizaje del alumnado, ayudando a evaluar su proceso educativo. Finalmente, en el caso de la educativa, las familias y otros miembros de la comunidad educativa participan en las actividades de aprendizaje del alumnado, tanto en horario escolar como extraescolar. En este último caso se encuadra la formación de familiares. Esta actuación no se refiere a que las familias entran en el aula de sus hijos/as, como hemos visto en el caso de GI (en el papel de voluntarios/as). Se refiere a que las familias piden, organizan y participan en cursos de formación para ellas mismas.

Algunas investigaciones previas sobre parent involvement han presentado a las familias no solo como responsables de llevar a sus hijos/as a la escuela, sino también como "recursos" ellas mismas (Civil & Bernier, 2006), en el sentido de que también pueden enseñar. Sin embargo, cuando esto sucede a veces aparecen también tensiones debido a que las familias tienden a reproducir aquello que han aprendido en la escuela, y enseñan "igual que me enseñaron a mí". (Civil, Díez-Palomar, Menéndez, & Acosta-Iriqui, 2008) Algunas de las nuevas estrategias didácticas, recursos, o metáforas de aprendizaje son desconocidas para las familias. Cuando los padres y las madres intentan ayudar a sus hijos/as en casa, se crean esos conflictos. La formación de las familias es una AEE porque en cualquier lugar donde se lleve a cabo siempre sirve para dotar a las familias de herramientas que luego pueden usar (o no) con sus hijos/as en casa.

Un ejemplo para ilustrar esta AEE son los Talleres de Matemáticas para Familias. En uno de esos talleres, realizado en el marco de un proyecto ARIE financiado por la Generalitat de Catalunya, en 2008, se abordó una dificultad usual para algunas familias: la explicación de cómo resolver una ecuación de primer grado. Los proyectos ARIE nacieron con la voluntad de unir investigadores/as y profesorado (de primaria y secundaria) para avanzar en la investigación educativa y transferir los resultados obtenidos al ámbito de la práctica (escolar). El concepto de ecuación acostumbra a introducirse en la ESO. Para ello actualmente en muchas escuelas se usa el "método de la balanza". Este algoritmo introduce los dos miembros de la ecuación como si fueran "platillos en una balanza". La balanza tiene que estar siempre equilibrada. Por eso, si hacemos algún movimiento en uno de los "platillos", tenemos que hacer el mismo en el otro. De otra forma la balanza perdería el equilibrio. La zona de al derecha de la Figura 3 ilustra esta idea.

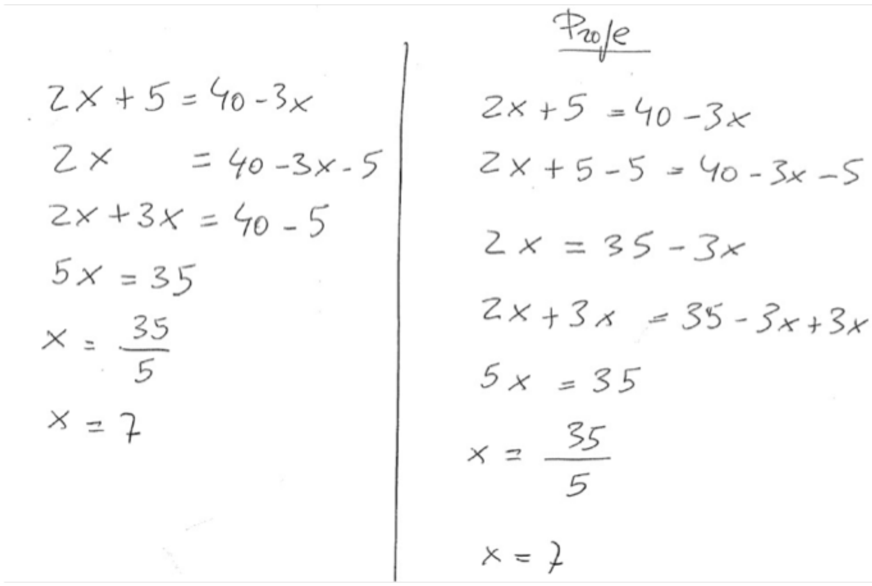

Figura 3: Reproducción propia de la pizarra. Notas del cuaderno de observación.

Este ejemplo se usó en el taller de 2008. Las madres que participaban en el taller resolvieron la ecuación $2x + 5 = 40 - 3x$ utilizando el algoritmo de "saltar el signo igual", es decir, cada vez que un elemento pasa "al otro lado" del igual, cambia y realiza la operación contraria (si suma, resta; si resta, suma; si multiplica, divide; etc.). Cuando la facilitadora del taller explicó el "algoritmo de la balanza" varias madres no entendían de dónde salía el -5 del lado izquierdo del igual. Una de ellas incluso llega a verbalizar que "en casa no lo entendíamos".

Facilitadora:	*¿Qué tal? ¿bien?*
Madres:	*Sí...muy bien [se oye más alto la madre que había expresado su duda]*
Madre:	*Es que en casa no lo entendíamos.*
Facilitadora:	*Eh?*
Madre:	*Que en casa no lo entendía así, que eso que has explicado ahora, mi hija me decía: Mamá, ¡Es que lo ponemos aquí! Y yo decía... ¿dónde lo ponéis?... porque yo lo sabía hacer de la otra... de la manera antigua (se oye rumor de fondo, como si le diesen la razón) y yo no lo entendía porque como en el libro no lo explica...*
Facilitadora:	*¿Pero ahora lo ves más claro? ...*
Madre:	*[Se oyen a madres que dicen que sí, de fondo] Más o menos, lo que pasa es que aquí es más fácil... pero a mí... [se pone a reír y gesticula con las manos indicando que a veces los ejercicios son difíciles].*
Facilitadora:	*...bueno... el otro es lo mismo... pero tienes que ir...*
Madre:	*[Simultáneamente] ahora sí que lo veo, porque... porque...*
Facilitadora:	*[Simultáneamente] para cada uno.*
Madre:	*Explica que lo hace así, y yo no lo sabría explicar....*

La madre que participa en este episodio afirma que no entendía cuando su hija la decía "es que lo ponemos aquí". Este tipo de situaciones se repiten en varios lugares del mundo, cuando las familias tratan de ayudar a sus hijos/as con las matemáticas (Civil, Planas & Quintos, 2012). La formación de familiares contribuye a crear espacios de diálogo, donde se ponen en común recursos y metodologías. Esto empodera a las familias, y, por otro lado, crea la oportunidad para que puedan contribuir al aprendizaje de las matemáticas de sus hijos/as.

c) Las Tertulias Matemáticas Dialógicas (TMD)

Las Tertulias Matemáticas Dialógicas (TMD) parten del enfoque de tertulias literarias dialógicas desarrollado por Flecha (2000) en la escuela de La Verneda, durante finales de los años setenta. Las TMD se basan en la idea de que todas las personas somos "sujetos capaces de lenguaje y acción" (Habermas, 1984). Parten de la idea de la cognición distribuida (Hutchins, 1991): la comprensión de una idea es resultado de un diálogo en el que cada una de las personas aporta su "granito de arena". El enfoque dialógico del intercambio de argumentos a partir de un diálogo igualitario que integra las diferentes experiencias, formaciones, conocimientos previos, permite entender cómo se produce este fenómeno de aprendizaje compartido entre todas las personas del grupo.

Las TMD funcionan con una persona, que es la responsable únicamente de iniciar la tertulia y llevar los turnos de palabra. Pero son las personas de la propia TMD quienes deciden qué libros leer (con la condición de que sean clásicos reconocidos por la comunidad científica internacional). Cada persona lee previamente las páginas que ha acordado todo el grupo para leer, y señala en el texto aquello que le ha sorprendido, aquello por lo que tiene curiosidad, lo que no entiende, etc. Luego, durante la tertulia, la persona que dinamiza recoge los nombres de las personas que desean compartir con el resto su fragmento de la lectura. A continuación, por orden de turnos, se da inicio a la tertulia: la persona que dinamiza da turnos de palabra. A cada fragmento se abre un turno de discusión, para que cada persona de la tertulia pueda aportar su punto de vista, lo que sabe del concepto que se está discutiendo, etc. Después, se da paso al fragmento de otra persona. Esta es la dinámica de funcionamiento de la TMD.

El criterio de elegir siempre clásicos (de las matemáticas) es importante. La investigación previa en reading sugiere que el uso de clásicos incrementa la calidad del vocabulario y de las construcciones gramaticales, además de plantear para el debate temas que han pasado a formar parte de nuestro bagaje universal. Autoras como Snow (2010) han demostrado con sus estudios que la habilidad para utilizar el código elaborado propio de la literatura clásica no depende de la clase socio-económica, como Bernstein (1971, 1974, 1975) había sugerido en los años setenta, ochenta y noventa; al contrario, depende de la cantidad de oportunidades que una persona ha tenido para ser "expuesta" al código elaborado. Esta misma conclusión ha sido confirmada por la neurociencia. Cuántas más asociaciones hayamos hecho con la imagen de un concepto, mejor lo codificaremos y mejor recordaremos luego las características de dicho concepto (Kandel, Schwartz, Jessell, Siegelbaum & Hudspeth, 2014). De hecho, tal y como dice Snow, no familiarizarse con el lenguaje académico dificulta luego la lectura en etapas posteriores de la vida. En matemáticas sucede lo mismo: la comprensión del lenguaje matemático no depende de una predisposición cognitiva especial; depende de la cantidad de veces que una persona ha podido conocer y utilizar los códigos matemáticos. Por eso es crucial que en la TMD se utilicen libros clásicos, con las notaciones y conceptos especializados de matemáticas.

A continuación se añade una cita de la TMD que se hace con personas adultas que no tienen formación matemática previa (personas que asisten a una escuela de personas adultas, y que en varios casos son de reciente alfabetización), a modo de ejemplo. El libro que se está leyendo es un clásico sobre la historia de las matemáticas. En este fragmento se está discutiendo sobre los diferentes sistemas de numeración a lo largo de la historia. En concreto, se comparan el sistema de numeración romano, con el hindú-arábico. Carmen afirma que el hindú-arábico tiene más numerales que en romano.

Carmen:	*El cero no sé...*
Fina:	*Son diez, ¿no?*
Adela:	*¿Cuáles números has dicho?*
Carmen:	*Mira, el uno, son los romanos: el uno, el cinco, el diez, la L que es cincuenta, C cien, D quinientos y M mil.*
Varias:	*Sí.*
Carmen:	*Pero el árabe se ve que tiene tres números más.*
Voluntario:	*¿Y cuáles son estos números?*
Carmen:	*Uno tiene que ser el cero... yo es que no he sabido...*
Antonia:	*Y el tres. Claro. Y el siete. El tres y el siete. Lo pone aquí. El tres, el siete, y el cero. El cero, el tres y el siete. Bueno, yo lo que he visto es que ellos... O sea... Es en base diez. O sea, todo es en base diez. Diez, veinte, treinta... Van de diez en diez... O de veinte en veinte... O de cien en cien... Pero... Pero que la base es diez. Es la que decidieron ellos.*
Voluntario:	*Aha. ¿Ellos?...*
Antonia:	*Ellos son los árabes. Sí. Y el cero, el seis y el nueve, dice que estuvieron una época... Dice que estuvieron una época, que en Florencia no quisieron utilizarlos, porque era muy fácil de... De falsificar. Y al final dice: A finales del siglo XIII el gobierno de Florencia dictaba normas en contra del uso de estos símbolos, por la facilidad de falsificar el cero, seis y nueve. O sea, no querían la numeración arábiga por eso, porque era fácil de falsificar. Y a mí me llamó mucho la atención cómo la gente se fue espabilando, no*

En este diálogo vemos también otro de los rasgos de la TMD: la contextualización de los conceptos. Las personas que participan en la tertulia buscan la concreción de los conocimientos que están aprendiendo. En este caso se introduce en la discusión un elemento social como es el tema de la facilidad de falsificar los numerales *hindú-arábicos*. Esto fue uno de los motivos que ralentizó la difusión e implantación de ese sistema de numeración, a pesar de ser mucho más ágil para realizar los cálculos, que el romano. En este fragmento también aparece otro aspecto, el uso del "cero". Los romanos desconocían el uso del cero como numeral. En el caso de los hindúes algunos libros de historia de las matemáticas señalan que fue una de sus grandes contribuciones a las matemáticas, que revolucionaron el mundo de los algoritmos de cálculo aritmético.

Voluntario:	*Hay muchas culturas de estas que no tenían cero. ¿Y qué hacían? Para ellos el primer número era el uno.Antes del uno no había nada. Antes no había número.*
Antonia:	*Es que si no hay cero no se puede operar. Sin cero no se puede operar.*
Voluntario:	*¿Y por qué no se puede operar?*
Inés:	*Porque...*
Carmen:	*Porque dependiendo...*
Antonia:	*No, no no... Porque ahora por ejemplo, ahora por ejemplo... Si yo quiero poner siete mil, si no hay ceros no puedo poner siete mil... Porque no voy a poner siete mil unos... Siete mil palitos... No voy a poner siete mil palitos... Es decir, que el cero es un número, y muy importante.*

Antonia explica, a su manera, claramente por qué es necesario el cero. El tener que justificar sus afirmaciones para el resto del grupo hace que busque argumentos que puedan ser comprendidos por el resto de personas que participan en la TMD. Eso amplía las oportunidades de comprensión matemática del texto, más allá de la simple lectura mecánica de las ideas que allí aparecen escritas. Esto es lo que ocurre al leer de manera compartida los libros escogidos, utilizando el enfoque dialógico: como las personas tienen que hacerse entender, es preciso que busquen argumentos que el resto del grupo pueda entender y verificar. Eso es un esfuerzo cognitivo para la persona, y supone clarificar los conceptos para el resto. Desde el punto de vista epistemológico, para explicar conceptos como *sistema de numeración* o *uso del cero* es necesario comprender qué quieren decir estas nociones, en términos matemáticos. Tal y como ha demostrado la investigación previa, la verbalización y la argumentación son claves en la comprensión de las ideas matemáticas (Lampert, 1990). De acuerdo con Bakhtin (1981), la comprensión de un concepto es resultado de la suma de "diálogos" que hemos tenido a lo largo del nuestra experiencia. Por eso, las TMD son espacios que maximizan este elemento del aprendizaje: porque incorporan en el mismo espacio diferentes "diálogos" con diferentes personas, y todo eso ayuda a construir la idea matemática de la que se está discutiendo.

4. Conclusión

En este artículo hemos ilustrado como funcionan tres AEE: los GI, la formación de familiares y las TMD. Son tres casos de *Aprendizaje Dialógico*.

Cuando se aplica alguna de estas tres AEE (o las tres a la vez) lo que sucede es algo que ya predijo Vygotsky (1978): se transforma el contexto. La escuela y el aprendizaje se convierten en deseables. Pero también suceden más cosas: en los GI, por ejemplo, gracias a la creación de ese *espacio de aprendizaje dialógico* se da la posibilidad de que los niños y las niñas, al hacer el esfuerzo de usar argumentos de validez para justificar sus afirmaciones, identifiquen conjuntamente los obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1983) y sean capaces de encontrar el mejor argumento para resolver los conflictos cognitivos que puedan tener. En el caso de las formación de familiares, se logra que las familias participen también de la educación de sus hijos/as, y conozcan más recursos y estrategias didácticas. En el caso de las TMD, se tiene acceso al lenguaje complejo de las matemáticas, y, a partir de la solidaridad del grupo, y del intercambio igualitario de argumentos con pretensiones de validez, las personas integrantes de la tertulia desarrollan una mejor comprensión (y más en profundidad) de los conceptos matemáticas que surgen de las obras escogidas para su lectura.

El análisis de las interacciones (Díez-Palomar & Cabré, 2015) permite ver los procesos sociales involucrados en el aprendizaje. La comunicación, el diálogo, el lenguaje, usado para transmitir ideas, conocimientos, con una intencionalidad de pretensión de validez y de veracidad, abren la oportunidad a que las personas a nivel individual podamos construir *estructuras cognitivas*. La neurociencia cada vez está dotándonos de instrumentos para identificar físicamente en el cerebro esas estructuras. En el futuro la combinación de estas dos herramientas, el estudio de las interacciones y la neurociencia como forma de validación empírica de los aprendizajes, pueden abrir nuevos horizontes para mejorar nuestra comprensión de cómo funciona el aprendizaje de las matemáticas, y qué orientaciones didácticas se desprende de ello.

Referencias

Ansari D., Lyons I. M. (2016).
Cognitive neuroscience and mathematics learning: how far have we come? Where do we need to go?
ZDM, 48(3), 379–383.

Bakhtin M. M. (1981).
The dialogic imagination: Four essays (Vol. 1).
Austin, TX: University of Texas Press.

Bakker A., Smit J., Wegerif R. (2015).
Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review.
ZDM, 47(7), 1047–1065.

Bernstein B. (1971).
Class, Codes and Control. Volume 1: Theoretical Studies towards a Sociology of Language.
London and New York: Routledge.

Bernstein B. (1974).
Class, codes and control. Volume 2. Applied Studies towards a Sociology of Language.
London and New York: Routledge.

Bernstein B. B. (1975).
Class, Codes and Control. Volume 3. Towards a Theory of Educational Transmissions.
London and New York: Routledge.

Bishop A. J. (1988).
Mathematics education in its cultural context.
Educational Studies in Mathematics, 19, 179–191.

BOE (2014).
Decreto regulador sobre el currículum de infantil y primaria.
https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2014-2222

Brousseau G. (1983).
Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques.
Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 165–198.

Carraher T. N., Carraher D. W., Schliemann A. D. (1985).
Mathematics in the streets and in schools.
British journal of developmental psychology, 3(1), 21–29.

Civil M., Bernier E. (2006).
Exploring images of parental participation in mathematics education: Challenges and possibilities.
Mathematical Thinking and Learning, 8(3), 309–330.

Civil M., Díez-Palomar J., Menéndez J. M., Acosta-Iriqui J. (2008).
Parents' Interactions with Their Children When Doing Mathematics.
Adults Learning Mathematics, 3(2a), 41–58.

Civil M., Planas N., Quintos B. (2012).
Immigrant parents' perspectives on their children's mathematics education.
En Helen Forgasz, y Ferdinand Rivera (Eds.), Towards Equity in Mathematics Education (pp. 267–282). Springer Berlin Heidelberg.

Cobb P., Yackel E. (1996).
Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research.
Educational psychologist, 31(3-4), 175–190.

D'Ambrosio U. (1985).
Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics.
For the learning of Mathematics, 5(1), 44–48.

Dehaene S., Spelke E., Pinel P., Stanescu R., Tsivkin S. (1999).
Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence.
Science, 284(5416), 970–974.

Díez-Palomar J., Kanes C. (2012).
Family and community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics achievement (Vol. 9).
Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Díez-Palomar J., Cabré J. (2015).
Using dialogic talk to teach mathematics: The case of interactive groups.
ZDM, 47(7), 1299–1312.

Díez-Palomar J. (2004).
La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas: un modelo dialógico
(Doctoral dissertation, Universitat de Barcelona).

Dolores C. (2000).
Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal, 155—181.
http://cimate.uagro.mx/pub/Crisologo/ArticuloICME8.pdf

Drews D. (2011).
Errors and misconceptions: the teachers' role.
In Hansen A., Drews D., Dudgeon J., Lawton F., Surtees L. (eds.), Children's Errors in Mathematics. Learning Matters (pp. 11-19). Exeter: Learning Matters Ltd.

Elboj C., Niemela R. (2010).
Sub-communities of mutual learners in the classroom: The case of interactive groups.
Journal of Psychodidactics, 15(2), 177–189.

English L. D. (2015).
STEM: challenges and opportunities for mathematics education.
In Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 4-18). PME.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Epstein D. (1998).
Real boys don't work: 'Underachievement', masculinity and the harassment of 'sissies'.
In Epstein D., Elwood J., Hey V., Maw J. (eds.), Failing Boys? Issues in Gender and Achievement (pp. 96-107). Buckingham: Open University Press.

Fan X., Chen M. (2001).
Parental involvement and students' academic achievement: A meta-analysis.
Educational Psychology Review, 13(1), 1–22.

Flecha R. (2000).
Sharing words: Theory and practice of dialogic learning.
Rowman & Littlefield.

Flecha R. (2015).
Successful educational actions for inclusion and social cohesion in Europe.
Springer.

Foster V., Kimmel M., Skelton C. (2001).
'What about boys'? An overview of the debates.
In W. Martino and B. Meyenn (eds.), What about the Boys? Issues of Masculinity in Schools (pp. 1-23). Buckingham: Open University Press.

García-Carrión R., Díez-Palomar J. (2015).
Learning communities: Pathways for educational success and social transformation through interactive groups in mathematics.
European Educational Research Journal, 14(2), 151–166.

Habermas J. (1984).
The theory of communicative action, volume I.
Boston: Beacon.

Hembree R. (1990).
The nature, effects, and relief of mathematics anxiety.
Journal for research in mathematics education, 21(1), 33–46.

Hoover-Dempsey K. V., Walker J. M., Sandler H. M., Whetsel D., Green C. L., Wilkins A. S., Closso, K. (2005).
Why do parents become involved? Research findings and implications.
The Elementary School Journal, 106(2), 105–130.

Hutchins E. (1991).
The social organization of distributed cognition.
In Lauren B. Resnick J.M. Levine and S. D. Teasley (eds.), Perspectives on Socially Shared Cognition (pp. 283–307). APA Science Volume Series.

Jeynes W. H. (2003).
A meta-analysis the effects of parental involvement on minority children's academic achievement.
Education and urban society, 35(2), 202–218.

Kandel S., Schwartz J. H. Jessell (2014).
Principios de neurociencia.
McGraw-Hill Interamericana.

Klein D. (2003).
A brief history of American K-12 mathematics education in the 20th century.
Mathematical cognition, 175–259.

Lampert M. (1990).
When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching.
American Educational Research Journal, 27(1), 29–63.

Lerman S. (2000).
The social turn in mathematics education research. Multiple perspectives on mathematics teaching and learning.
En Jo Boaler (Ed.), Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and . Learning (pp. 19-44) Greenwood Publishing Group.

Lobato J., Clarke D., Ellis A. B. (2005).
Initiating and eliciting in teaching: A reformulation of telling.
Journal for Research in Mathematics Education, 36(2), 101–136.

Ma X. (1999).
A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics.
Journal for Research in Mathematics Education, 30(5), 520–540.

Mercer N. (1996).
The quality of talk in children's collaborative activity in the classroom.
Learning and Instruction, 6(4), 359–377.

Mercer N., Wegerif R., Dawes L. (1999).
Children's talk and the development of reasoning in the classroom.
British educational research journal, 25(1), 95–111.

Pino-Fan L., Godino J. D., Font V., Castro W. F. (2013).
Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative.
En Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 3195–3205).

Polya G. (1945).
How to solve it: A new aspect of mathematical model.
Princeton: Princeton University Press.

Ryan A.M. (2001).
The peer group as a context for the development of young adolescent motivation and achievement.
Child Development, 72(4), 1135–1150.

Schwartz D., Gorman A.H., Nakamoto J., McKay T. (2006).
Popularity, social acceptance, and aggression in adolescent peer groups: Links with academic performance and school attendance.
Developmental Psychology, 42(6), 1116–1127.

Snow C. E. (2010).
Academic language and the challenge of reading for learning about science.
Science, 328(5977), 450–452.

Tall D., Vinner S. (1981).
Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.
Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169.

Valls R., Kyriakides L. (2013).
The power of Interactive Groups: how diversity of adults volunteering in classroom groups can promote inclusion and success for children of vulnerable minority ethnic populations.
Cambridge Journal of Education, 43(1), 17–33.

Vukovic R. K., Kieffer M. J., Bailey S. P., Harari R. R. (2013).
Mathematics anxiety in young children: Concurrent and longitudinal associations with mathematical performance.
Contemporary Educational Psychology, 38(1), 1–10.

Vygotsky L. S. (1978).
Mind in society: The development of higher psychological processes.
Harvard, MA: Harvard University Press.

Webb N.M. (1989).
Peer interaction and learning in small groups.
International Journal of Educational Research, 13(1), 21–39.

Wentzel K.R., Caldwell K. (1997).
Friendships, peer acceptance, and group membership: Relations to academic achievement in middle school.
Child Development, 68(6), 1198–1209.

Wood D., Bruner J. S., Ross G. (1976).
The role of tutoring in problem solving.
Journal of child psychology and psychiatry, 17(2), 89–100.