DOSIER SEMANAL 08

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ los objetos matemáticos siguientes:

- El plano α que pasa por los puntos $A(1,\ -1,\ 2)$, $B(-2,\ 1,\ 1)$ y $C(-1,\ 1,\ 0)$
- El plano $\beta: -2x + y - 3z - 2 = 0$
- La recta r que pasa por $O(0,0,0)$ y cuyo vector director es $\vec{u} = (2,2,-4)$
- La recta $s: \begin{cases} x - 3y - 2z + 1 = 0 \\ -x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Se pide determinar, razonadamente:

a) La ecuación **general** del plano α
b) La ecuación **paramétrica** del plano β y un vector **ortonormal*** a dicho plano.
c) **Ángulo** formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
d) El **área del triángulo** determinado por los puntos A, B y C
e) Un **vector perpendicular** a los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ simultáneamente
f) La ecuación de **dos planos cuya intersección sea la recta $\boldsymbol{r}$**.
g) La ecuación **continua** de la recta s.
h) La ecuación general del plano **paralelo** a β que pasa por el punto $D(5,\ 4,\ -3)$
i) La ecuación continua de la recta **paralela** a s que pasa por el punto A
j) La ecuación vectorial del plano que es **perpendicular** a la recta r y pasa por B
k) La **posición relativa** de los planos α y β
l) El **volumen del tetraedro** formado por el origen de coordenadas y los puntos A, B y C
m) La **posición relativa** de la recta r y el plano β
n) La ecuación de la recta **paralela a $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$** y que pasa por el origen de coordenadas.

a) Para escribir la ecuación de un plano, necesitamos un punto y dos vectores directores. Dado que nos proporcionan tres puntos del plano, bastará con considerar uno de ellos y construir (por ejemplo) los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2,\ 1,\ 1) - (1,\ -1,\ 2) = (-3,2,-1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1,\ 1,\ 0) - (1,\ -1,\ 2) = (-2,2,-2)$$

Dado que nos piden la ecuación del plano en lugar de utilizar $\overrightarrow{AC} = (-2,2,-2)$, haremos uso del vector paralelo (proporcional) $(1,-1,1)$. Así pues, **la ecuación general del plano** que nos piden será:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \leftrightarrow\ x + 1 + 2y - 2 + z = 0 \ \leftrightarrow\ \boldsymbol{\alpha: x + 2y + z - 1 = 0}$$

b) Para obtener la ecuación paramétrica del plano β consideraremos su ecuación general como un sistema con dos grados de libertad:

$$\beta: -2x + y - 3z - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x = \lambda \\ z = \mu \end{matrix} \quad \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = 2 + 2\lambda + 3\mu} \quad \boldsymbol{con\ \lambda, \mu} \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{z = \mu} \end{cases}$$

Ahora buscaremos un vector ortonormal. Sabemos que un vector normal al plano vendrá dado por los coeficientes de su ecuación general:

$$\beta: -2x + y - 3z - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{n_\beta} = (-2, 1, -3)$$

Si su módulo fuera uno, ya tendríamos el vector que nos piden:

$$\|\overrightarrow{n_\beta}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

Por tanto, un vector ortonormal al plano será:

$$\frac{\overrightarrow{n_\beta}}{\|\overrightarrow{n_\beta}\|} = \left(\frac{\boldsymbol{-2}}{\sqrt{\boldsymbol{14}}}, \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{14}}}, \frac{\boldsymbol{-3}}{\sqrt{\boldsymbol{14}}}\right)$$

c) El ángulo formado por dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ puede calcularse a partir de su producto escalar

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}$$

Así pues, dado que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3, 2, -1) \cdot (-2, 2, -2) = 6 + 4 + 2 = 12$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$$

Obtenemos que:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = arccos\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\right) = \boldsymbol{22,2^o}$$

d) El área del triángulo ABC se puede obtener dividiendo entre dos el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, 2) \ \rightarrow \ \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Por tanto:

$$Area = \frac{\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\boldsymbol{6}}\ \boldsymbol{u^2}$$

e) El producto vectorial de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ me proporcionará un vector perpendicular a ambos:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{-3}, \boldsymbol{-5}, \boldsymbol{-1})$$

f) Primeramente, escribiremos la ecuación continua de la recta r. Esto es sencillo ya que conocemos un punto y un vector director de dicha recta:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-4}$$

Para expresarla como intersección de dos planos seleccionamos dos igualdades de las que se contemplan en la ecuación continua:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{2} \rightarrow\ 2x=2y\ \rightarrow\ x-y=0$$

$$\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-4} \rightarrow -4y=2z\ \rightarrow\ 4y+2z=0\ \rightarrow\ 2y+z=0$$

Por lo que la recta r puede expresarse como **intersección de** estos **dos planos** obtenidos:

$$\boldsymbol{r}\text{:}\ \begin{cases}\boldsymbol{x-y=0}\\ \boldsymbol{2y+z=0}\end{cases}$$

g) Para escribir la ecuación continua de la recta s, consideraremos los dos planos que la generan por intersección e introduciremos el grado de libertad que existe:

$$s\text{:}\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\ -x-y+2z+3=0\end{cases} \rightarrow\ z=\lambda \rightarrow \begin{cases}x-3y=-1+2\lambda\\ -x-y=-3-2\lambda\end{cases} +$$

$$-4y=-4\ \rightarrow\ y=1$$

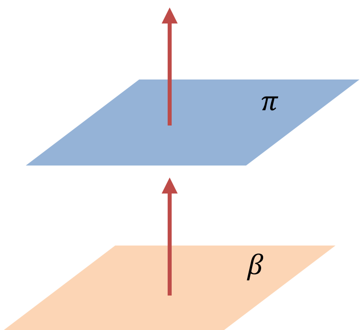
Lo que nos lleva a que:

$$s\text{:}\begin{cases}x=-1+2\lambda+3\\ y=1\\ z=\lambda\end{cases} \quad\rightarrow\quad s\text{:}\begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=1\\ z=\lambda\end{cases}$$

Así pues, un punto de la recta s será el punto $P_s=(2,1,0)$ y un vector director de s será $\overrightarrow{u_s}=(2,0,1)$. Esto nos permite escribir la **ecuación continua** de la recta s:

$$\boldsymbol{s}\text{:}\ \boldsymbol{\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}}$$

h) En esta ocasión, la mejor opción para obtener el plano que nos piden es utilizando un vector normal y un punto del plano. De hecho, al ser paralelo a β, sabemos que su ecuación general solo se diferenciará en su término independiente:



$$\pi\text{:}-2x+y-3z+D=0$$

Dado que $D(5,\ \ 4,\ \ -3)$ es un punto de dicho plano, debe verificar su ecuación:

$$-2\cdot5+4-3\cdot(-3)+D=0\ \ \rightarrow\ \ -10+4+9+D=0$$

$$\rightarrow\ D=-3$$

Así pues, la **ecuación general del plano** que nos piden es:

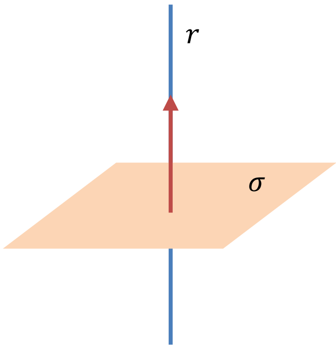
$$\boldsymbol{\pi\text{:}-2x+y-3z-3=0}$$

Pedro A. Martínez Ortiz
www.maths4everything.com
@maths4everthink

i) Dado que la recta que nos piden es paralela a s tendrán el mismo vector director. Por tanto, su **ecuación continua** será:

$$\boldsymbol{t}: \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{y+1}}{\boldsymbol{0}} = \frac{\boldsymbol{z-2}}{\boldsymbol{1}}$$

j) En este caso, el vector director de la recta r coincide con el vector normal del plano que nos piden. Así pues, la ecuación general del plano que piden tendrá la forma:



$$\sigma: 2x + 2y - 4z + D = 0$$

Dado que el punto $B(-2,\ 1,\ 1)$ pertenece al plano, deberá cumplir su ecuación:

$$2\cdot(-2) + 2\cdot 1 - 4\cdot 1 + D = 0 \ \rightarrow\ -4 + 2 - 4 + D = 0 \ \rightarrow\ D = 6$$

Por tanto, la ecuación general del plano buscado será:

$$\sigma: 2x + 2y - 4z + 6 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sigma: x + y - 2z + 3 = 0$$

Dado que nos piden su ecuación vectorial, pasamos la ecuación a paramétrica y de ahí a vectorial:

$$\sigma: x + y - 2z + 3 = 0 \ \overset{\substack{y=\lambda \\ z=\mu}}{\Longrightarrow}\ \sigma: \begin{cases} x = -3 - \lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad con\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Así pues, **la ecuación vectorial del plano perpendicular a r que pasa por B será:**

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (-\boldsymbol{3}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) + \boldsymbol{\lambda}\cdot(-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}) + \boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}) \quad \boldsymbol{con\ \lambda, \mu} \in \mathbb{R}$$

k) Los planos α y β se observa fácilmente que **son secantes** ya que:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha: x + 2y + z - 1 = 0 \\ \beta: -2x + y - 3z - 2 = 0 \end{array}\right\} \ \rightarrow\ \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$$

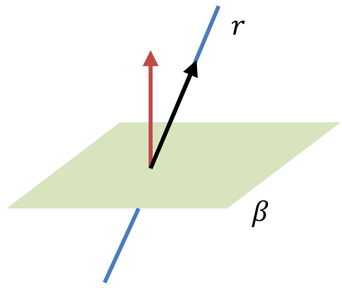
l) Sabemos que el volumen del tetraedro OABC vendrá dado por la sexta parte del valor absoluto del producto mixto formado por los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$:

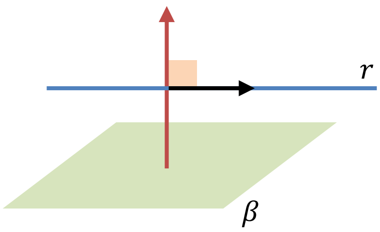
$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 1 - 4) - (-2 + 1 + 0) = -3 + 1 = -2$$

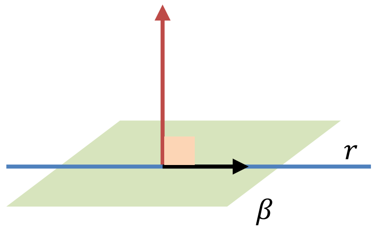
Así pues:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|}{6} = \frac{|-2|}{6} = \frac{2}{6} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\ \boldsymbol{u^3}$$

m) Para determinar la posición relativa de la recta r y el plano β, necesitamos conocer primeramente el resultado del producto escalar del vector director de r y del vector normal del plano β:



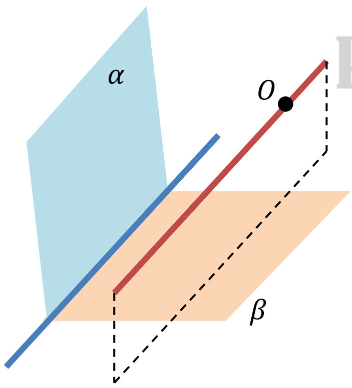




$$\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=(2,2,-4)\cdot(-2,1,-3)=-4+2+12=10\neq 0$$

Por tanto, dado que el producto escalar de estos vectores es distinto de cero, concluimos que **la recta r y el plano β son secantes**.

n) La recta que nos piden tendrá el mismo vector director que la recta que se obtiene como intersección de los planos α y β. Este vector puede obtenerse multiplicando vectorialmente los vectores normales de ambos planos:



$$\overrightarrow{n_\beta}\times\overrightarrow{n_\beta}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=(-7,1,5)$$

Así pues, la ecuación continua de la recta paralela a los planos que pasa por el origen de coordenadas será:

$$\boldsymbol{m}\colon \frac{\boldsymbol{x}}{-\boldsymbol{7}}=\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{1}}=\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{5}}$$

PROBLEMA 2: Resuelve la ecuación matricial $A^2X = A - 3I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcularemos primeramente la matriz A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, dado que:

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Sabemos que tiene inversa y, por tanto, podemos utilizar esta matriz inversa para resolver la ecuación matricial propuesta:

$$A^2X = A - 3I \quad \rightarrow \quad (A^2)^{-1}A^2X = (A^2)^{-1}(A - 3I) \quad \rightarrow \quad X = (A^2)^{-1}(A - 3I)$$

Necesitaremos calcular la inversa de la matriz A^2. En esta ocasión utilizaremos el método de Gauss-Jordan para obtener la matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F1 \leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{F2 \leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así pues:

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Por tanto:

$$X = (A^2)^{-1}(A - 3I) = A(A - 3I) = A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$