SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 04

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de los **determinantes** $|-3A^T|$, $|A^{-1} \cdot B^2|$, $|A+B|$ y $|A \cdot (A \cdot B)^{-1}|$

b) Determinar el **rango** de cada una de las matrices propuestas

c) **Resolver**, si es posible, la ecuación matricial

$$A - X = XB$$

d) **Resolver**, si es posible, la ecuación matricial

$$AXB = BA$$

e) **Resolver**, si es posible, el sistema matricial

$$\left.\begin{array}{r} 2X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{array}\right\}$$

a) Primeramente, calcularemos el valor de los determinantes de las matrices A y B, ya que los utilizaremos posteriormente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (observemos\ que\ es\ triangular\ superior)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F1' = F1 + F2 \\ F3' = F3 + F2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Ahora, calcularemos los determinantes que nos piden aplicando las propiedades de los determinantes (siempre que sea posible):

$$|-3A^T| = (-3)^3 \cdot |A^T| = (-3)^3 \cdot |A| = (-3)^3 \cdot 1 = -27$$

$$|A^{-1} \cdot B^2| = |A^{-1}| \cdot |B^2| = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 = 1 \cdot (-2)^2 = 4$$

$$|A \cdot (A \cdot B)^{-1}| = |A| \cdot |(A \cdot B)^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|A \cdot B|} = |A| \cdot \frac{1}{|A| \cdot |B|} = \frac{1}{|B|} = -\frac{1}{2}$$

No hay ninguna propiedad que nos permita calcular de forma directa el determinante $|A+B|$. Así pues, aquí no nos queda otra alternativa salvo calcular la matriz A+B y después su determinante:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=8+1+2-4=7$$

b) **El rango de A es 3** ya que es una matriz cuadrada triangular superior y no se anula ninguna fila o columna.

Para estudiar el **rango de la matriz B**, procederemos a aplicar el método de Gauss para triangularla:

$$Rg(B)=Rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}F2'=F2+F1\\ F3'=F3-F1\end{bmatrix}=Rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$[F2\leftrightarrow F3]=Rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=3$$

Veamos ahora el **rango de la matriz C**. Sabemos que como máximo, su rango sólo puede ser dos (ya que posee únicamente dos columnas):

$$Rg(C)=Rg\begin{pmatrix}2 & -7\\ 3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}=[F1\leftrightarrow F3]=Rg\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\\ 2 & -7\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}F2'=F2-3F1\\ F3'=F3-2F1\end{bmatrix}$$

$$=Rg\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -17\\ 0 & -17\end{pmatrix}=[F3'=F3-F2]=Rg\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -17\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2$$

c) Primeramente, despejaremos la matriz X:

$$A-X=XB\ \rightarrow\ A=XB+X\ \rightarrow\ A=X\cdot(B+I)$$

Suponiendo que la matriz B+I es regular (y por tanto tiene inversa):

$$A\cdot(B+I)^{-1}=X\cdot(B+I)\cdot(B+I)^{-1}$$

$$A\cdot(B+I)^{-1}=X$$

Así pues, ahora sólo restaría comprobar que B+I es regular y calcular su inversa:

$$B+I=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Así pues:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&0&1&0&0\\-1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F1\leftrightarrow F3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\-1&2&1&0&1&0\\2&-1&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F2'=F2+F1\\F3'=F3-2F1}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\0&3&3&0&1&1\\0&-3&-4&1&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow[F3'=F3+F2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\0&3&3&0&1&1\\0&0&-1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F2'=F2+3F3\\F1'=F1+2F3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&2&-1\\0&3&0&3&4&-2\\0&0&-1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[F1'=-3F1+F2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&0&0&-3&-2&1\\0&3&0&3&4&-2\\0&0&-1&1&1&-1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{F1'=\frac{F1}{-3}\\F2'=\frac{F2}{3}\\F3'=-F3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2/3&-1/3\\0&1&0&1&4/3&-2/3\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

Por tanto, la inversa de B+I es:

$$(B+I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2/3&-1/3\\1&4/3&-2/3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Esto nos permite ahora calcular fácilmente la matriz X que verifica la ecuación propuesta:

$$X=A\cdot(B+I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\1&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/3&-1/3\\0&7/3&-5/3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

d) Primeramente, despejaremos la matriz X:

$$AXB=BA\ \rightarrow\ A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}BAB^{-1}\ \rightarrow\ X=A^{-1}BAB^{-1}$$

Esto lo hemos podido hacer porque las matrices A y B son regulares y, en consecuencia, existe su inversa (como hemos comprobado en apartados anteriores). Así pues, lo que haremos ahora es calcular la inversa de A y B para después obtener la matriz X que verifica la ecuación propuesta:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2'=F2+F3]{F1'=F1+F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1'=F1+F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la inversa de B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-F1]{F2'=F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\leftrightarrow F3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F2'=F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F1'=2F1+F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F2'=\frac{F2}{2}]{F1'=\frac{F1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ya podremos calcular la matriz X que verifica la ecuación propuesta:

$$X = A^{-1}BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e) Aplicaremos doble reducción para averiguar las matrices X e Y que nos piden:

$$\left.\begin{array}{r}2X+Y=A\\X-2Y=B\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2X+Y=A\\-2X+4Y=-2B\end{array}\right\}\rightarrow\ 5Y=A-2B\ \rightarrow\ Y=\frac{1}{5}(A-2B)$$

Así pues, aplicando reducción para averiguar X, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r}2X+Y=A\\X-2Y=B\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}4X+2Y=2A\\X-2Y=B\end{array}\right\}\rightarrow\ 5X=2A+B\ \rightarrow\ X=\frac{1}{5}(2A+B)$$

Con lo que ya sólo resta calcular ambas matrices:

$$X=\frac{1}{5}(2A+B)=\frac{1}{5}\left[2\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-3&-2\\-1&3&-1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{5}(A-2B)=\frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-1&-3\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2: Calcula el valor del determinante en función del parámetro real x:

$$\begin{vmatrix}2&x&x&x\\x&2&x&x\\x&x&2&x\\x&x&x&2\end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante propuesto de orden 4, utilizaremos el método de adjuntos. No obstante, como paso previo conseguiremos algún cero en el determinante (utilizando propiedades de los determinantes que no modifican su valor) para así facilitar el cálculo:

$$\begin{vmatrix}2&x&x&x\\x&2&x&x\\x&x&2&x\\x&x&x&2\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}F2'=F2-F1\\F3'=F3-F1\\F4'=F4-F1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}2&x&x&x\\x-2&2-x&0&0\\x-2&0&2-x&0\\x-2&0&0&2-x\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}Extraemos\ factor\ común\\x-2\ de\ las\ filas\ 2,3\ y\ 4\end{bmatrix}=(x-2)^3\begin{vmatrix}2&x&x&x\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{vmatrix}=$$

$$= [C1' = C1 + C2 + C3 + C4] = (x-2)^3 \begin{vmatrix} 2+3x & x & x & x \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Desarrollamos\ por\ Adjuntos \\ desde\ la\ primera\ columna \end{bmatrix} = (x-2)^3(2+3x) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-2)^3(2+3x)$$

PROBLEMA 3: Determina razonadamente los valores del parámetro real m para que la matriz M sea regular.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 5m & -m & m^2 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz sea regular su determinante debe ser distinto de cero. Así pues, lo que haremos, será calcular el determinante de M y estudiar para que casos se anula:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 5m & -m & m^2 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 5 & -1 & m \end{vmatrix} = m \cdot (m^2 - 31 - 5m + 3 + 2m) =$$

$$= m \cdot (m^2 - 3m - 28)$$

Igualamos el determinante a cero para averiguar los valores de m que anulan el determinante:

$$m \cdot (m^2 - 3m - 28) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 3m - 28 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 7 \\ m = -4 \end{cases}$$

Así pues, cuando el parámetro m valga 0, 7 o -4, el determinante de la matriz M se anulará y en consecuencia no poseerá inversa. Así pues, matemáticamente escrito, concluimos que:

$$\exists M^{-1} \quad \forall m \neq 0, 7, -4$$