DOSSIER SEMANAL 02

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las matrices cuadradas:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcula la inversa de A **por definición**
b) Calcula la inversa de B por el método de **Gauss-Jordan**
c) Calcula la inversa de C por el método de **Gauss-Jordan**

a) Sabemos que la inversa debe cumplir que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ siendo I la matriz identidad del mismo orden que A. Así pues:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\ 3x+7z & 3y+7t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

De aquí podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}x+2z=1\\ 3x+7z=0\\ y+2t=0\\ 3y+7t=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}-3x-6z=-3\\ 3x+7z=0\\ -3y-6t=0\\ 3y+7t=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}-3x-6z=-3\\ z=-3\\ -3y-6t=0\\ t=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}x=7\\ z=-3\\ y=-2\\ t=1\end{array}\right\}$$

Por tanto, concluimos que:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

b) Utilicemos el método de Gauss-Jordan para obtener la inversa que se pide:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F2`=3F2+4F1\\ F3`=3F3-2F1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -7 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[F3`=5F3+4F2]{}$$

$$\xrightarrow[F3`=5F3+4F2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -7 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 6 & 12 & 15\end{array}\right)\xrightarrow[F3`=F3/(-3)]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -7 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F1'=F1+F3]{F2`=F2+7F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & 0 & -1 & -4 & -5\\ 0 & -5 & 0 & -10 & -25 & -35\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)\xrightarrow[F2`=\frac{F2}{-5}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & 0 & -1 & -4 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F1`=F1+2F2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)\xrightarrow[F1`=F1/3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)$$

Así pues:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

c) Es fácil darse cuenta que la matriz C no tiene inversa ya que existe dependencia lineal entre sus filas o columnas. Se aprecia que, por ejemplo, la primera fila puede obtenerse sumando las dos últimas filas.

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\rightarrow F1=F2+F3\rightarrow Rg(C)=2$$

Como consecuencia, su rango no es 3 y, por tanto, no tiene inversa. **La matriz C es singular**.

PROBLEMA 2: Determina el **rango** de la matriz A. ¿Tiene inversa? ¿Por qué?:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 5 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Podemos recurrir al método de Gauss para triangular la matriz y obtener su rango. No obstante, en este caso sencillo, es fácil ver (por ejemplo) que la segunda fila puede obtenerse a partir de la resta de la fila 3 menos la fila 1. Así pues:

$$Rg(A)=Rg\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 5 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Dado que las dos filas que quedarían no son proporcionales, podemos decir que son independientes y en consecuencia el rango de A es dos.

$$Rg(A) = Rg\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Si optamos por hacerlo utilizando el método de Gauss, el proceso podría quedar como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3'=2F3+3F1]{F2'=2F2+5F1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & -10 & -4 \\ 0 & -10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3'=F3-F2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y se observa claramente, que sólo hay dos filas que no se anulan completamente. **Por tanto, su rango es 2**.

PROBLEMA 3: Determina el **rango** de la matriz M en función del parámetro real m:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso, realizaremos una triangulación previa de la matriz empleando el método de Gauss:

$$Rg(M) = Rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = [C4 \leftrightarrow C1] = Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F2' = F2 - F1 \\ F3' = F3 - 2F1 \end{bmatrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & m-4 \end{pmatrix} = [F3' = F3 - F2] = Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, el rango de la matriz cambia para los valores de m que anulan la última de las filas:

$$m - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 4$$

Tendremos entonces dos posibles casos:

CASO I: $m \neq 4 \;\; \rightarrow \;\; Rg(M) = 3$ porque en este caso no se anularía ninguna fila.

CASO II: $m = 4 \rightarrow \;\; Rg(M) = 2$ porque la tercera fila de la matriz M se anularía

PROBLEMA 4: **Demuestra que** toda matriz cuadrada A de orden n que cumple:

$$A^2 + 5A - I = 0$$

(siendo I la matriz identidad de orden n) **es regular**.

Sabemos que la matriz cuadrada A cumple:

$$A^2 + 5A - I = 0$$

Por tanto, esto equivale a escribir que:

$$A^2 + 5A = I$$

O lo que es lo mismo (sacando factor común por la izquierda):

$$A \cdot (A + 5I) = I$$

O (sacando factor común por la derecha):

$$(A + 5I) \cdot A = I$$

Por tanto, ya podemos afirmar que la matriz A es regular ya que hemos encontrado una matriz (en este caso $A + 5I$) que al multiplicarla por ella obtenemos la matriz identidad. Esta era precisamente la definición de inversa de una matriz. Así pues, **la matriz A es regular y su inversa es**:

$$A^{-1} = A + 5I$$