PROBLEMA 1: Considera las matrices:

$$M=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1-k & 1\\ 0 & 1 & 1+k\end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Determina los valores del parámetro real k para que la matriz M sea **invertible**.

b) Determina los valores del parámetro real k para que el sistema $M\cdot(x,y,z)^T=(0,0,0)^T$ sea compatible indeterminado.

c) Para $k=0$, determina la **matriz X** que verifica: $XM-N=X$

d) Determina el valor del **determinante** de la matriz $(3N^2)^{-1}$

a) Para que la matriz M sea invertible, su determinante no ha de ser cero. Así pues, calculemos el determinante y averigüemos qué valores de k lo anulan:

$$|M|=\begin{vmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1-k & 1\\ 0 & 1 & 1+k\end{vmatrix}=[C3'=C3-C1]=\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 1-k & 0\\ 0 & 1 & 1+k\end{vmatrix}$$

$$|M|=3\cdot(1-k)\cdot(1+k)$$

Así pues:

$$|M|=3\cdot(1-k)\cdot(1+k)=0$$

lo que implica que: $k=1$ o $k=-1$. Por tanto, la matriz M es invertible para todo valor de $k\neq\pm1$

b) El sistema $M\cdot(x,y,z)^T=(0,0,0)^T$ equivale al sistema:

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1-k & 1\\ 0 & 1 & 1+k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 1-k & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1+k & 0\end{array}\right)=M^*$$

La matriz de coeficientes del sistema es la matriz M del apartado anterior. En este apartado habíamos estudiado los valores para los cuales su determinante es cero. Estos valores son precisamente los que nos delimitan los posibles casos a analizar:

CASO I: $k\neq\pm1$

En este caso $|M|\neq0$ y en consecuencia, $Rg(M)=3$. Dado que M^* tiene tres filas y contiene a M (de rango 3), necesariamente debe ocurrir que $Rg(M^*)=3$. Por el Tª de Rouchè-Fröbenius concluimos que en este caso el sistema es **compatible y determinado** pues:

Pedro A. Martínez Ortiz
www.maths4everything.com
@maths4everthink

$$Rg(M) = Rg(M^*) = nº\ incógnitas = 3$$

CASO II: $k = 1$

En este caso $|M| = 0$ y en consecuencia, $Rg(M) < 3$. Dado que existe un menor principal de orden dos no nulo, concluimos que $Rg(M) = 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Del mismo modo, M^* no puede tener rango 3 ya que M^* es la matriz M a la que se le añade una columna de ceros (términos independientes). Por tanto el rango de M^*coincide con el de M. Por el Tª de Rouchè-Fröbenius concluimos que en este caso el sistema es **compatible indeterminado** pues:

$$Rg(M) = Rg(M^*) = 2 \neq 3 = nº\ incógnitas$$

CASO III: $k = -1$

En este caso $|M| = 0$ y en consecuencia, $Rg(M) < 3$. Dado que existe un menor principal de orden dos no nulo, concluimos que $Rg(M) = 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Del mismo modo, M^* no puede tener rango 3 ya que M^* es la matriz M a la que se le añade una columna de ceros (términos independientes). Por tanto el rango de M^*coincide con el de M. Por el Tª de Rouchè-Fröbenius concluimos que en este caso el sistema es **compatible indeterminado** pues:

$$Rg(M) = Rg(M^*) = 2 \neq 3 = nº\ incógnitas$$

Así pues, **el sistema propuesto será compatible indeterminado cuando $k = 1$ o $k = -1$.**

c) Resolviendo la ecuación matricial propuesta vemos que:

$$XM - N = X \quad \to \quad XM - X = N \quad \to \quad X \cdot (M - I) = N \quad \to \quad X = N \cdot (M - I)^{-1}$$

Siempre que exista la matriz inversa de $M - I$. Veamos si existe, y en caso de que así sea, calculemos la matriz inversa:

$$M-I=\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Dado que:

$$|M-I|=\begin{vmatrix}2&0&3\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Podemos asegurar que la matriz $B=M-I$ tiene inversa. Por ello:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj^T(B)$$

Dado que ya sabemos el valor de su determinante ($|B|=1$), calcularemos primeramente la matriz de adjuntos:

$$B_{11}=+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1 \quad B_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0 \quad B_{13}=+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix}0&3\\1&0\end{vmatrix}=3 \quad B_{22}=+\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}=0 \quad B_{23}=-\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=-2$$

$$B_{31}=+\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}=0 \quad B_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=1 \quad B_{33}=+\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}=0$$

Por tanto, **la inversa de la matriz B será**:

$$B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X=N\cdot(M-I)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&1\\-1&3&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

d) Dado que el determinante de la matriz N es:

$$|N|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=-2$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, tenemos que:

$$|(3N^2)^{-1}|=\frac{1}{|3N^2|}=\frac{1}{3^3|N|^2}=\frac{1}{27\cdot(-2)^2}=\frac{1}{108}$$

PROBLEMA 2: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=2+m \\ (1-m)x+y+2z=1 \\ mx-y-z=1-m \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=2+m \\ (1-m)x+y+2z=1 \\ mx-y-z=1-m \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2+m \\ 1-m & 1 & 2 & 1 \\ m & -1 & -1 & 1-m \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real k:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1-m & 1 & 2 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ m+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = m\cdot(m+1)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro k, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = m\cdot(m+1) = 0 \Rightarrow \quad m=0 \text{ ó } m=-1$$

Esto nos permite **distinguir tres casos posibles**:

CASO I: $m \neq 0 \ y \ m \neq -1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & m & 1 & 2+m \\ 1-m & 1 & 2 & 1 \\ m & -1 & -1 & 1-m \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como <u>**SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**</u>. $R(A)=R(A^*)=3=NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 2+m & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1-m & -1 & -1 \end{vmatrix}}{m\cdot(m+1)} = \frac{-2m^2+5m}{m\cdot(m+1)} = \frac{m\cdot(-2m+5)}{m\cdot(m+1)} = \frac{5-2m}{m+1} \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+m & 1 \\ 1-m & 1 & 2 \\ m & 1-m & -1 \end{vmatrix}}{m\cdot(m+1)} = \frac{2m^2+2m}{m\cdot(m+1)} = \frac{2m\cdot(m+1)}{m\cdot(m+1)} = 2 \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2+m \\ 1-m & 1 & 1 \\ m & -1 & 1-m \end{vmatrix}}{m\cdot(m+1)} = \frac{-m^3+3m^2-3m}{m\cdot(m+1)} = \frac{-m\cdot(m^2-3m+3)}{m\cdot(m+1)} = \frac{-(m^2-3m+3)}{m+1}
\end{aligned}\right\}$$

Así pues, la solución (en función de m) vendrá dada por:

$$(x,y,z) = \left(\frac{5-2m}{m+1}, 2, \frac{-(m^2-3m+3)}{m+1}\right)$$

CASO II: $m=-1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es <u>**INCOMPATIBLE**</u>, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes no coinciden. Esto se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss: $$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3+F1]{F2'=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=3F3+2F2]{} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$ Observamos que el número de filas no nulas en A es dos, mientras que en la matriz ampliada no hay ninguna fila nula. Así pues, aquí se cumple que: $$R(A) = 2 \neq R(A^*) = 3$$

CASO III: $m = 0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden, pero este valor es menor que el número de incógnitas. Se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss: $$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3'=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Por tanto, se observa que: $$R(A) = R(A^*) = 2 \neq Num. incógnitas$$

Resolvamos el sistema aprovechando la aplicación del método de Gauss realizado en la discusión. En este caso, observamos que disponemos de un grado de libertad, por tanto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in R$$